Université de Montréal

Superintégrabilité avec intégrales d'ordre trois, algèbres polynomiales et mécanique quantique supersymétrique

par

Ian Marquette

Département de Physique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Physique

février 2009

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Superintégrabilité avec intégrales d'ordre trois, algèbres polynomiales et mécanique quantique supersymétrique

présentée par

Ian Marquette

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Manu Paranjape

(président-rapporteur)

Pavel Winternitz

(directeur de recherche)

Véronique Hussin

(membre du jury)

Willard Miller Jr.

(examinateur externe)

Khalid Benabdallah

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:

RÉSUMÉ

Le but de cette thèse est de poursuivre la recherche systématique des systèmes superintégrables classiques et quantiques possédant une intégrale d'ordre trois. Nous présentons les résultats de trois articles. Dans le premier article, nous considérons un système hamiltonien classique superintégrable, tout à fait général, dans un espace en deux dimensions possédant une intégrale d'ordre deux et une intégrale d'ordre trois et nous construisons l'algèbre de Poisson cubique générée par ses intégrales du mouvement. Nous donnons l'opérateur de Casimir de cette algèbre. Nous appliquons ensuite ces résultats à des potentiels superintégrables séparables en coordonnées cartésiennes. Nous présentons également dans cet article les trajectoires pour ces systèmes et montrons que les trajectoires bornées sont périodiques. Dans le deuxième article, nous considérons un système hamiltonien quantique superintégrable dans un espace en deux dimensions possédant une intégrale d'ordre deux et trois et construisons l'algèbre cubique la plus générale. Nous donnons l'opérateur de Casimir de cette algèbre. Nous obtenons des réalisations en termes d'algèbres parafermioniques. Cela nous permet d'obtenir des représentations de types Fock. De ces résultats, nous présentons une méthode pour obtenir le spectre d'énergie dégénéré de systèmes quantiques superintégrables. Nous appliquons ensuite cette méthode à différents systèmes dont le potentiel est une fonction rationnelle. Nous présentons également une étude de ces potentiels quantiques du point de vue de la mécanique quantique supersymétrique et donnons le spectre d'énergie et les fonctions d'ondes. Finalement, dans le troisième article nous considérons un hamiltonien impliquant la quatrième transcendante de Painlevé. Nous présentons une étude de ce système à l'aide de l'algèbre cubique engendrée par ses intégrales. Nous étudions également ce système en utilisant la supersymétrie avec des opérateurs de supercharges d'ordre deux et l'invariance de forme d'ordre trois. Nous donnons le spectre d'énergie et les fonctions d'ondes. Cette thèse et les articles qu'elle contient, ont augmenté notre connaissance des systèmes superintégrables avec une intégrale d'ordre trois, de leurs liens avec la supersymétrie et ont permis de développer des méthodes pour résoudre les équations d'Hamilton-Jacobi et de Schrödinger correspondantes.

Mots clés : superintégrabilité, algèbre polynomiale, algèbre parafermionique, mécanique quantique, supersymétrie, transcendantes de Painlevé

ABSTRACT

The purpose of my thesis is to pursue a systematic study of classical and quantum superintegrable potentials with a third order integral of motion. We present results from three articles. In the first article, we consider general Hamiltonian that possess a second and third order integral and construct the cubic Poisson algebra generated by integrals of motion. We present the Casimir operator of this algebra. We apply these results to potentials separable in Cartesian coordinates. We present also in this article the trajectories and show that all bounded trajectories are periodic. In the second article, we consider a quantum superintegrable Hamiltonian system in a two-dimensional space with a scalar potential and one quadratic and one cubic integral and construct the most general cubic algebra generated by the integrals and obtain the Casimir operator. We constructed Fock type representations by means of parafermionic algebras. These results give a method to find the degenerate energy spectrum of quantum superintegrable system. We apply this method to many systems. We also present a study of these quantum potentials from the point of view of supersymmetric quantum mechanics and give the spectrum and the eigenfunctions. Finally, in the third article we consider a superintegrable Hamiltonian involving the fourth Painlevé transcendent. We present a study of this system using the cubic algebra generated by its integrals of order 2 and three. We study this system using supersymmetric quantum mechanics with second order supercharge operators and third order shape invariance. We give the energy spectrum and the eigenfunctions. This thesis and the articles it is based upon have advanced our knowledge of superintegrable systems with a third order integral of motion, their relation to supersymmetry and have developed methods to solve the corresponding Hamilton-Jacobi and Schrödinger equations.

Keywords : superintegrability, polynomial algebra, parafermionic algebra, quantum mechanics, supersymmetry, Painlevé transcendent

TABLE DES MATIÈRES

Résumé iii

Abstract v

Liste des figures x

Dédicace xi

.... xii

Remerciements xiii

Introduction 1

0.1. **Références** 3

Chapitre 1. Concepts de base 5

1.0.1. Mécanique classique 5

1.0.2. Mécanique quantique 10

1.1. **Références** 15

Chapitre 2. Symétrie, supersymétrie et structures algébriques 18

2.0.1. Systèmes superintégrables et méthodes algébriques 19

2.0.2. Algèbres d'oscillateurs déformées et parafermioniques 22

2.0.3. Applications aux systèmes superintégrables 23

2.0.4. Supersymétrie 26

2.1. **Références** 32

Chapitre 3. Superintégrabilité avec intégrales d'ordre trois 34

3.1. **Références** 41

Description de l'article 1 43

Chapitre 4. Polynomial Poisson algebras for superintegrable systems with a third order integral of motion 44

4.1. Introduction 45

4.2. Cubic Poisson algebras 47

4.3. Cubic Poisson algebras for classical superintegrable systems 49

4.4. Trajectories for classical superintegrable systems 58

4.5. Conclusion 62

4.6. **References** 64

Description de l'article 2 69

Chapitre 5. Superintegrability with third order integrals of motion, cubic algebras and supersymmetric quantum mechanics I :Rational function potentials 70

5.1. Introduction 70

5.2. Cubic and parafermionic algebras 74

5.3. Irreducible rational function potentials 79

5.4. Supersymmetric quantum mechanics 85

5.4.1. Potential 1 86

5.4.2. Potential 4 90

5.4.3. Potential 5 91

5.4.4. Potential 6 91

5.5. Generating spectrum algebra 93

5.6. Complexification of superintegrable potentials 95

5.7. Conclusion 98

5.8. Appendix 100

5.9. **References** 101

Description de l'article 3 104

Chapitre 6. Superintegrability with third order integrals of motion, cubic algebras and supersymmetric quantum mechanics II : Painlevé transcendent potentials 105

6.1. Introduction 105

6.2. Cubic and parafermionic algebras 108

6.2.1. Case $\epsilon = 1$ 110

6.2.2. Case $\epsilon = -1$ 112

6.3. Third order shape invariance and superintegrable systems 114

6.4. Special cases 120

6.4.1. Case $\alpha = 5$, $\beta = -8$, $f(z) = \frac{4z(2z^2-1)(2z^2+3)}{(2z^2+1)(4z^4+3)}$ and $\epsilon = 1$ 120

6.4.2. Case $\alpha = 5$, $\beta = -8$, $f(z) = \frac{4z(2z^2-1)(2z^2+3)}{(2z^2+1)(4z^4+3)}$ and $\epsilon = -1$ 122

6.4.3. Case $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{2}{9}$, $f(z) = -\frac{2}{3}z$ and $\epsilon = 1$ 123

6.4.4. $\alpha = -1, \beta = -\frac{32}{9}$, $f(z) = -\frac{2z}{3} - \frac{2z^2-3}{z(2z^2+3)}$ and $\epsilon = 1$ 124

6.4.5. Case $\alpha = 0$, $\beta = -2$, $f(z) = -2z - \Psi(z)$ and $\epsilon = 1$ 125

6.4.6. Case $\alpha = 0$, $\beta = -2$, $f(z) = -2z - \Psi(z)$ and $\epsilon = -1$ 127

6.5. Conclusion 127

6.6. **References** 129

Conclusion 133

6.7. **Références** 136

LISTE DES FIGURES

4.1 Case 1 :$V = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$, Case 2 :$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{y^2}$ 67

4.2 Case 3 :$\frac{\omega^2}{2}(4x^2 + y^2) + \frac{b}{y^2} + cx$, Case 4 :$\frac{\omega^2}{2}(9x^2 + y^2)$ 67

4.3 Case 5 :$V = \beta_1^2\sqrt{|x|} + \beta_2^2\sqrt{|y|}$ 67

4.4 Case 6 :$\frac{\omega^2}{18}(2b + 5x^2 + 4x\sqrt{b + x^2})$ 68

4.5 Case 7 :$V = a^2|y| + b^2\sqrt{|x|}$ et Case 8 :$V = a^2|y| + b^2|x|$ 68

DÉDICACE

À mes parents

« Symmetry is ubiquitous. Symmetry has myriad incarnations in the innumerable patterns designed by nature. It is a key element, often the central or defining theme, in art, music, dance, poetry, or architecture. Symmetry permeates all of science, occupying a prominent place in chemistry, biology, physiology, and astronomy. Symmetry pervades the inner world of the structure of matter, the outer world of the cosmos, and the abstract world of mathematics itself. The basic law of physics , the most fundamental statements we can make about nature, are founded upon symmetry. »

Leon M. Lederman and Christopher T. Hill, Symmetry and the beautiful universe (2004)

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier mon directeur de thèse Pavel Winternitz de m'avoir donné l'opportunité d'étudier un sujet aussi fascinant pour ma thèse. J'ai eu l'occasion d'aborder de très intéressantes symétries et structures algébriques. Je suis maintenant à même de voir le chemin parcouru et il m'apparaît que je n'aurais pu imaginer les résultats que nous avons obtenu au cours de ces années. Je crois que c'est également en cela que réside l'essence de la recherche. Je le remercie de m'avoir fait bénéficier de ses connaissances et de ses intuitions et pour tous les précieux conseils et suggestions qui ont permis à cette thèse de progresser et voir le jour.

J'ai également eu l'opportunité de faire un séjour de recherches en Italie à l'Université de Rome 3. Je remercie donc l'Université de Rome 3 pour son hospitalité et en particulier le professeur Decio Levi qui a accepté de me superviser pendant mon séjour. J'ai aussi eu l'occasion d'assister à la troisième conférence internationale sur la superintégrabilité à Prague et je remercie l'Institut Doppler et le département de physique de l'Université technique tchèque de Prague.

J'aimerais remercier Pascale celle qui partage mon quotidien et qui m'a donné bien des encouragements. J'aimerais également remercier mes parents pour leur support tout au long de ces nombreuses années d'études. J'aimerais aussi remercier mon frère Maxime pour son aide, très appréciée, au niveau de l'informatique.

J'aimerais également remercier Frédérick Tremblay, Jean Marc Terrier, Michael Gektman, Véronique Hussin, Alexander Turbiner, Miloslav Znojil, Costas Daskaloyannis pour les discussions très utiles à l'avancement de cette thèse.

INTRODUCTION

L'étude des symétries est au coeur des travaux de la physique moderne. Il existe plusieurs types de symétrie, certaines s'avèrent plus visibles et de nature géométrique, alors que d'autres sont beaucoup plus abstraites. D'un point de vue mathématique, la théorie des groupes se veut le formalisme dans lequel on peut exprimer et manipuler les symétries. Il y a des groupes discrets qui peuvent décrire les symétries discrètes comme les groupes cycliques, diédraux et de permutations. Les symétries continues sont décrites par ce que l'on appelle des groupes de Lie. Ces derniers ont été étudiés par Sophus Lie, un mathématicien norvégien du 18^e siècle. Le groupe des rotations dans le plan, de Lorentz et de Poincaré, représentent de tels groupes. Ils sont riches et possèdent une structure de variétés différentiables. Ils peuvent être de dimension finie ou infinie. On peut définir pour ceux-ci un espace vectoriel pourvu de certaines propriétés et que l'on appelle une algèbre de Lie. Cette structure algébrique demeure toutefois plus facile à manipuler et peut nous permettre de faire des généralisations. L'étude des symétries peut nous permettre de percer les rouages à l'origine de phénomènes physiques complexes. Les symétries peuvent de surcroît servir comme principe unificateur et organisateur. Nous pouvons tout d'abord penser aux travaux de Gell-Mann et Ne'eman en 1961 [1] dans lesquels ceux-ci ont montré indépendamment que certaines particules élémentaires, les baryons et les mésons, pouvaient être classifiées de manière très naturelle par des représentations irréductibles de l'algèbre de Lie su(3). Les algèbres de Lie jouent également un grand rôle dans le modèles standard et dans la recherche de théories dites d'unification des forces. Aussi, l'étude des symétries nous fournit des méthodes élégantes et puissantes dans le but de faire l'étude de systèmes en physique, notamment en mécanique quantique. Le spectre d'énergie discret de l'atome d'hydrogène peut être obtenu de l'algèbre de Lie so(4). C'est effectivement cette approche qui a été utilisée par Pauli, avant même que Schrödinger ait posé sa fameuse équation, pour retrouver la formule de Rydberg qui donne les raies spectrales de l'atome d'hydrogène.

L'hamiltonien décrivant l'atome d'hydrogène s'avère très particulier. Celui-ci possède plus d'intégrales que de degrés de liberté. Un tel système est dit superintégrable et renferme de nombreuses propriétés. D'un point de vue mathématique, les systèmes superintégrables apparaissent comme très rares, mais ils sont tout de même présents dans plusieurs domaines de la physique. Il y a le potentiel de Hartmann [2] qui décrit la molécule de benzène et le système de Calogero-Moser-Sutherland [3], système très important en matière condensée. On peut alors se demander s'il existe d'autres hamiltoniens exhibant de telles propriétés et qui pourraient modéliser certains phénomènes de la physique. La majorité des études ont été consacrées aux systèmes possédant des intégrales d'ordre deux. L'étude des systèmes avec une intégrale d'ordre trois est plus récente. Cette thèse cherche à poursuivre l'étude de tels systèmes. La classification des hamiltoniens possédant une intégrale d'ordre deux et une intégrale d'ordre trois séparables en coordonnées cartésiennes. Il existe 21 potentiels quantiques et 8 potentiels classiques [4]. Nous allons donc dans cette thèse faire l'étude de ces sytèmes.

Pour aborder ces systèmes, nous allons devoir considérer certaines extensions des algèbres de Lie. Depuis une vingtaine d'années, de nombreux travaux ont été dévolus à des algèbres qui sont des extensions ou déformations des algèbres de Lie. Celles-ci sont présentes dans de nombreux domaines tels que la mécanique quantique, la physique nucléaire, la théorie des champs ou la théorie des cordes. Un type particulier de telles structures algébriques qui ont été étudiés sont des déformations d'algèbres de Lie avec un paramètre appelée algèbre (groupe) quantique. Nous allons aborder en particulier des extensions polynomiales d'algèbres de Lie.

Il existe d'autres types de structures algébriques telles que les superalgèbres et qui apparaissent dans le cadre de la supersymétrie. Elle consiste en une symétrie entre les bosons et les fermions et fut introduite dans le contexte de la théorie des champs quantiques. Ce type de symétrie est au coeur de la recherche de théorie au-delà du modèle standard. Deux des candidats de telles théories sont le modèle standard supersymétrique minimal et la théorie des supercordes. Nous allons toutefois utiliser un modèle qui, à l'origine, fut introduit par E.Witten [5] comme un simple modèle en vue d'étudier la brisure de la supersymétrie en théorie des champs quantiques. Ce modèle est la mécanique quantique supersymétrique. Nous allons utiliser cette structure de superalgèbre pour faire l'étude de systèmes superintégrables en mécanique quantique.

Dans le chapitre 1, nous introduisons des éléments théoriques de la mécanique classique et quantique. Nous donnons les définitions de l'intégrabilité et de la superintégrabilité. Dans le chapitre 2, nous présentons différentes structures et méthodes algébriques. Dans le chapitre 3, nous discutons de la superintégrabilité d'ordre trois. Puis, dans le chapitre 4, nous allons exposer les résultats concernant les trajectoires et les algèbres de Poisson polynomiales des systèmes classiques. Le chapitre 5 est, quant à lui, consacré à l'étude des systèmes quantiques écrits en terme de fonctions rationelles. Nous y présentons les résultats obtenus par l'étude de ces potentiels en utilisant l'algèbre de symétrie cubique et la mécanique quantique supersymétrique. Finalement, le chapitre 6 est dédié à un système quantique écrit en termes de la quatrième transcendante de Painlevé et qui est relié à la mécanique quantique supersymétrique avec des opérateurs de surpercharges d'ordre trois.

0.1. RÉFÉRENCES

[1] M.Gell-Mann, CTSL-20, Caltech, (1961), unpublished. Reprinted in : M.Gell-Mann et Y.Ne'eman, The Eightfold Way, ed. D. Pines, W. A. Benjamin, Inc., New York and Amsterdam, 317 pages (1964) ; Y. Neeman, Nucl. Phys. 26, 222-229 (1961).

[2] H.Hartmann, Theor. Chim. Acta 24, 201-206 (1972) ; M.Kibler et P.Winternitz, J.Phys.A :Math.Gen. 20, 4097-4108 (1987).

[3] F.Calogero, J.Math.Phys. 10, 2197-2200 (1969) ; F.Calogero, J.Math.Phys. 12, 419-436 (1971) ; B.Sutherland, Phys. Rev. A4, 2019-2021 (1971) ; B.Sutherland, Phys. Rev. A5, 1372-1376 (1972) ; J.Moser, Adv. Math. 16, 197-220 (1975) ; S.Wojciechowsky, Phys. Letters A 95, 279-281 (1983).

[4] S. Gravel, J. Math. Phys. 45 1003-1019 (2004).

[5] E.Witten, Nucl.Phys. B188, 513-554 (1981) ; E.Witten, Nucl.Phys. B202, 253-316 (1982).

Chapitre 1

CONCEPTS DE BASE

Discutée dans ce qui est considéré comme une des oeuvres les plus importantes de la science, les Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, en 1687, la première formulation moderne de la mécanique classique est celle de Newton. Cette théorie s'énonce en trois lois et utilise la notion de force pour décrire la dynamique des corps. La mécanique classique au 18^e et 19^e siècles s'est beaucoup développée. Du formalisme vectoriel de Newton, les physiciens et mathématiciens sont arrivés à différentes formulations très mathématisées que sont celles de Lagrange et d'Hamilton. Ces approches sont dites analytiques. Dans celles-ci, la vision en terme de potentiel vient à suppléer celle de force. Au sein de ces formulations, les équations du mouvement peuvent être tirées de méthodes variationnelles. À l'intérieur ce chapitre, nous allons énoncer plusieurs définitions de la formulation hamiltonienne de la mécanique classique qui vont nous permettre d'aborder les systèmes intégrables et superintégrables en mécanique classique. Nous allons ensuite voir comment les définitions de l'intégrabilité et de la superintégrabilité peuvent être transposées à la mécanique quantique.

1.0.1. Mécanique classique

Définition 1.0.1. *Dans le formalisme hamiltonien, on ajoute aux coordonnées généralisées q_i les impulsions généralisées p_i données par la formule suivante*

$$p_i \equiv \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad . \tag{1.0.1}$$

où $L(q, \dot{q}, t)$ *est le lagrangien.*

Définition 1.0.2. *Le lagrangien est donné par L(q,p,t)=T-V, où T et V sont respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.*

Définition 1.0.3. *L'hamiltonien H(q,p,t) d'un système à n degrés de liberté est généré du lagrangien par la transformation de Legendre suivante*

$$H(q,p,t) = \dot{q}_i p_i - L(q,p,t) \quad , \tag{1.0.2}$$

Les équations du mouvement d'Hamilton sont données par les expressions suivantes

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad . \tag{1.0.3}$$

Dans la formulation hamiltonienne, on remplace n équations différentielles du second ordre(équation d'Euler-Lagrange) par 2n équations du premier ordre. Ce sont les équations que l'on doit résoudre pour obtenir les trajectoires du système.

Pour un hamiltonien indépendant du temps et quadratique dans les impulsions, l'hamiltonien est l'énergie totale du système

$$H = T + V = E \quad . \tag{1.0.4}$$

Les hamiltoniens, que nous allons considérer dans cette thèse, seront de la forme suivante

$$H = \frac{1}{2} g_{ik} p_i p_k + V(\vec{q}) \tag{1.0.5}$$

Définition 1.0.4. *Un constante du mouvement G(q,p,t) satisfait* $\frac{dG}{dt} = 0$.

Définition 1.0.5. *Les transformations canoniques sont des changements de variables inversibles*

$$Q_i = Q_i(q,p,t), \quad P_i = P_i(q,p,t) \tag{1.0.6}$$

tels qu'il existe une fonction K(Q,P,t) qui joue le rôle de l'hamiltonien en regard du nouvel ensemble de coordonnées et tels que les équations d'Hamilton selon les nouvelles coordonnées sont également satisfaites

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad . \tag{1.0.7}$$

Définition 1.0.6. *On définit le* ***crochet de Poisson*** *de deux variables dynamiques u(q,p,t) et v(q,p,t) par rapport aux variables canoniques (q,p) de la manière suivante*

$$\{u,v\}_p = \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i} \quad . \tag{1.0.8}$$

L'ensemble des crochets de Poisson fondamentaux est donné par les expressions suivantes

$$\{q_i,p_j\}_p = \delta_{ij}, \quad \{q_i,q_j\}_p = 0, \quad \{p_i,p_j\}_p = 0 \quad . \tag{1.0.9}$$

Proposition 1.0.1. *Le crochet de Poisson possède les propriétés suivantes (la bilinéarité, l'antisymétrie, l'identité de Jacobi et la règle de Leibniz) :*

$$\begin{gathered} \{u,v\}_p = -\{v,u\}_p \quad , \\ \{au+bv,w\}_p = a\{u,w\}_p + b\{v,w\}_p \quad , \\ \{u,\{v,w\}\}_p + \{v,\{w,u\}\}_p + \{w,\{u,v\}\}_p = 0 \quad , \\ \{u,vw\}_p = \{u,v\}_p w + v\{u,w\}_p \end{gathered} \tag{1.0.10}$$

.

Nous avons également la propriété

Proposition 1.0.2.

$$\frac{du}{dt} = \{u,H\}_p + \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1.0.11}$$

Lorsque u est indépendant de t et que $\{u, H\} = 0$, u est une constante du mouvement.

Théorème 1.0.1 (Théorème de Poisson). *Le crochet de Poisson de deux constantes du mouvement est également une constante du mouvement*

$$\{H, \{u, v\}_p\}_p = 0. \tag{1.0.12}$$

Toutefois cette nouvelle constante du mouvement peut être triviale. Le crochet de Poisson et ses différentes propriétés permettent d'étudier les potentiels en mécanique classique d'un point de vue algébrique.
Dans la formulation lagrangienne, il existe un lien entre les symétries et les constantes du mouvement. Cela est mis en évidence dans le théorème de Noether [1,2]. Dans la formulation hamiltonienne, on peut également mettre en évidence une telle relation.

Proposition 1.0.3. *Les constantes du mouvement sont également les fonctions génératrices des transformations canoniques qui laissent l'hamiltonien invariant.*
Définition 1.0.7 (Intégrabilité). *En mécanique classique un système hamiltonien en n dimensions est intégrable s'il possède un ensemble de n intégrales du mouvement ($\{X_a\}$, a=1,...,$n-1$ et le hamiltonien H lui-même) qui sont des fonctions bien définies sur l'espace de phase, en involution $\{H, X_a\}_p = 0$, $\{X_a, X_b\}_p = 0$, a,b=1,...,$n-1$ et fonctionnellement indépendantes.*
Le critère pour l'indépendance des intégrales est le suivant

$$rang\frac{\partial(H, X_1 ... X_{n-1})}{\partial(q_1 ... q_n, p_1 ... p_n)} = n \quad . \tag{1.0.13}$$

Définition 1.0.8 (Superintégrabilité). *Un système intégrable est superintégrable s'il possède des intégrales supplémentaires Y_b, $\{H, Y_b\}_p = 0$, b=1,...,k qui sont bien définies sur l'espace de phase et les intégrales $\{H, X_1, ..., X_{n-1}, Y_1, ..., Y_k\}$ sont fonctionnellement indépendantes. Cependant, on n'impose pas aux intégrales*

Y_b d'être en involution avec les $X_1,...X_{n-1}$ ou entre elles. Le critère pour l'indépendance des intégrales est le suivant

$$rang\frac{\partial(H, X_1...X_{n-1}, Y_1, ...Y_k)}{\partial(q_1...q_n, p_1...p_n)} = n + k \quad . \tag{1.0.14}$$

Les systèmes superintégrables dans l'espace Euclidien en trois dimensions E_3 les plus connus sont bien sur l'oscillateur harmonique $V(r) = \omega r^2$ et le potentiel de Kepler-Coulomb $V(r) = \frac{\alpha}{r}$. Ceux-ci permettent de modéliser bon nombre de phénomènes. Voici un théorème concernant ces deux systèmes.

Théorème 1.0.2 (Théorème de Bertrand). *Dans E_3 les seuls potentiels avec une symétrie sphérique, pour lesquels toutes les trajectoires bornées sont périodiques, s'avèrent l'oscillateur harmonique et le potentiel de Kepler.*

Définition 1.0.9. *Un système est dit maximalement superintégrable s'il possède 2n-1 intégrales du mouvement indépendantes, c'est-à-dire k=n-1.*

Théorème 1.0.3. *Pour un système hamiltonien. On ne peut avoir plus que 2n-1 intégrales du mouvement indépendantes bien définies dans un espace de phase à 2n dimensions.*

Nous allons énoncer maintenant un autre théorème important, le théorème de Liouville [3]

Théorème 1.0.4 (Théorème de Liouville). *Soit $X_1, ..., X_n$ n intégrales du mouvement en involution, $\{X_i, X_j\} = 0$, et fonctionnellement indépendantes dans un espace M à 2n dimensions.*

1) M_a=$\{(q,p)\epsilon M\ :\ X_i = c_i\}$ est une sous-variété de M invariante sous le flot induit par le hamiltonien.

2) La solution des équations d'Hamilton peut être trouvée par quadrature, c'est-à-dire en ne faisant seulement que des intégrales.

3) Si M_a est compacte et connexe, alors celle-ci est difféomorphe à un tore de dimension n.

Le comportement de tels systèmes est donc très régulier. Les systèmes superintégrables ont un comportement encore plus régulier. Pour un système maximalement superintégrable les trajectoires classiques peuvent être obtenues de façon totalement algébrique.

1.0.2. Mécanique quantique

Nous allons donner plusieurs définitions et postulats de la mécanique quantique [4,5] et montrer comment les définitions de l'intégrabilité et de la superintégrabilité peuvent être transposées à la mécanique quantique.

Postulat 1.0.1. *L'état d'un système à un temps t est décrit par une fonction d'onde continue $\Phi(\vec{x},t)$ ($|\Psi(t)>$). Toute l'information sur le système est contenue dans cette fonction d'onde, un élément d'un espace de Hilbert.*

Postulat 1.0.2. *La probabilité, qu'une particule décrite par la fonction d'onde $\Phi(\vec{x},t)$ se trouve à l'instant t dans un élément de volume d^3x situé au point x, est donnée par $P(\vec{x},t)d^3x = |\Phi(\vec{x},t)|^2 d^3x$. $|\Phi(\vec{x},t)|^2$ est une densité de probabilité.*

Postulat 1.0.3. *Toute grandeur physique A est décrite par un opérateur $\hat{A}$. Cet opérateur est une observable.*

Postulat 1.0.4. *On demande à l'opérateur décrivant une grandeur physique d'être hermitien afin d'avoir des valeurs propres λ_A réelles, une quantité mesurable étant nécessairement réelle.*

$$\hat{A}|\lambda >= \lambda_A|\lambda > \tag{1.0.15}$$

Remarque 1.0.1. *Il existe d'autres conditions telles que la pseudo-hermiticité et la symétrie-PT pour obtenir des valeurs réelles. On parle alors de mécanique quantique PT-symétrique, non-hermitienne ou pseudo-hermitienne. Depuis une* *dizaine d'années, de nombreux articles et conférences ont été dévolus à ces autres formulations de la mécanique quantique [6].*

Postulat 1.0.5. *La mesure d'une grandeur physique A ne peut donner comme résultat qu'une des valeurs propres de l'observable correspondante.*

Postulat 1.0.6. *Soit une observable. Si l'état $|\Psi(t)>$ du système est normé, la valeur moyenne de l'observable à l'instant t vaut :*

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle (t) = \left\langle \Psi(t)|\hat{A}|\Psi(t) \right\rangle . \tag{1.0.16}$$

En représentation de la position, aux observables que sont la position, l'impulsion et l'énergie, sont associés les opérateurs suivants :

$$\hat{x}_i \longrightarrow x_i, \quad \hat{P}_i \longrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \hat{E} \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \tag{1.0.17}$$

Ces relations peuvent être utilisées comme règles de quantification. Les relations de commutation sont alors

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad . \tag{1.0.18}$$

Ces relations de commutation sont donc les équivalents quantiques des crochets de Poisson fondamentaux.

Postulat 1.0.7. *L'observable $\hat{A}$, qui décrit une grandeur physique A définie classiquement, s'obtient en remplaçant, dans l'expression convenablement symétrisée de A, x_i et p_i par les observables $\hat{x}_i$ et $\hat{p}_i$ respectivement.*

Postulat 1.0.8. *La fonction d'onde d'un système se développe dans le temps selon l'équation de Schrödinger qui constitue l'équation fondamentale de la mécanique quantique non-relativiste :*

$$\hat{H}|\Psi(t) >= i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t) > \quad , \tag{1.0.19}$$

où $\hat{H}$ est l'opérateur hamiltonien du système.

L'équation de Schrödinger, dans le cas d'un système en interaction avec un potentiel qui ne dépend pas du temps en trois dimensions s'écrit :

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{x},t)+V(\vec{x})\Psi(\vec{x},t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t} \quad . \tag{1.0.20}$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps donne les états stationnaires qui sont les états propres de l'hamiltonien. Cette équation est donnée par l'équation aux valeurs propres suivantes

$$\hat{H}\Psi_n(\vec{x})=E_n\Psi_n(\vec{x}) \quad . \tag{1.0.21}$$

De manière plus explicite, nous avons

$$(\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{x})+V(\hat{x}))\Psi_n(\vec{x})=E_n\Psi_n(\vec{x}) \quad . \tag{1.0.22}$$

De façon analogue à la mécanique classique où nous avions l'équation (1.0.11), nous avons en mécanique quantique la relation suivante

$$\frac{d\left\langle\hat{A}\right\rangle}{dt}=\frac{i}{\hbar}\left\langle[\hat{A},H(t)]\right\rangle+\left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle \quad , \tag{1.0.23}$$

où le commutateur joue le rôle du crochet de Poisson. Cette relation permet de définir la notion de constante du mouvement en mécanique quantique.

Définition 1.0.10. *On appelle constante du mouvement une observable $\hat{A}$ qui ne dépend pas explicitement du temps et qui commute avec $\hat{H}$:*

$$\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}=0, \quad [\hat{A},\hat{H}]=0 \tag{1.0.24}$$

Les concepts d'intégrabilité et de superintégrabilité peuvent être également transposés à la mécanique quantique.

Définition 1.0.11 (Intégrabilité). *En mécanique quantique, un hamiltonien est intégrable s'il existe un ensemble $\{X_a\}$ de n opérateurs bien définis, algébriquement indépendants, en incluant le hamiltonien, qui commutent deux à deux.*

Définition 1.0.12 (Superintégrabilité). *Un système intégrable est superintégrable s'il est intégrable et qu'il possède k opérateurs additionnels* $\{Y_b\}$ *qui commutent avec le hamiltonien. Les* Y_b *ne sont pas obligés de commuter entre eux ou avec les* X_a *.*

Nous devons néanmoins faire ici une remarque importante. Contrairement à la mécanique classique, où l'indépendance des intégrales est bien définie, en mécanique quantique aucune définition générale n'a été trouvée pour le moment. Nous allons utiliser la définition suivante, à savoir que des opérateurs peuvent être considérés indépendants à moins que l'un d'eux puisse être exprimé comme un polynôme dans les autres.

Dans les années soixante, les systèmes superintégrables avec deux intégrales du mouvement quadratiques dans les impulsions ont été étudiés dans un espace euclidien de deux dimensions et complètement classifiés. Ces potentiels nouveaux constituaient des généralisations des potentiels de Kepler-Coulomb et de l'oscillateur harmonique anisotropique. Dans l'article de 1967, P.Winternitz et ses collaborateurs ont donc trouvé 4 types de potentiels qui possédaient deux intégrales quadratiques dans E_2 [7,8,9]. Ces articles constituent le point de départ d'une recherche des systèmes superintégrables. Voici les 4 potentiels (où $r = \sqrt{x^2+y^2}$) :

$$H_1 = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2 + \omega^2 r^2 + \frac{\mu_1}{x^2} + \frac{\mu_2}{y^2}) \tag{1.0.25}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2 + \omega^2(4x^2 + y^2) + \frac{\mu}{y^2}) \tag{1.0.26}$$

$$H_3 = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2 + \frac{k}{r} + \frac{1}{r}(\frac{\mu_1}{r+x} + \frac{\mu_2}{r-x})) \tag{1.0.27}$$

$$H_4 = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2 + \frac{k}{r} + \frac{\mu_1\sqrt{r+x}}{r} + \frac{\mu_2\sqrt{r-x}}{r}). \tag{1.0.28}$$

Ces hamiltoniens sont superintégrables en mécanique classique et quantique. L'hamiltonien H_1 possède les deux intégrales suivantes

$$A = P_x^2 + \omega^2 x^2 + \frac{\mu_1}{x^2}, \quad B = (xP_y - yP_x)^2 + r^2(\frac{\mu_1}{x^2} + \frac{\mu_2}{y^2}). \tag{1.0.29}$$

Les fonctions d'onde sont

$$\phi^{\pm\pm}_{k_1,k_2}(x_1,x_2) = \omega \prod_i^2 \left(\frac{k_i!(\omega^2)^{\pm\nu_i}}{\Gamma(k_i \pm \nu_i + 1)}\right) e^{-\frac{\omega}{2}x_i^2} x_i^{\frac{1}{2}\pm\nu_i} L_{k_i}(\omega x_i^2), \quad \nu_i = \frac{1}{2}(1+4\mu_i)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.0.30}$$

Les $L_k^\nu(z)$ sont les polynômes de Laguerre et le spectre d'énergie discret des états liés est donné par

$$E = 2\omega(k_1 + k_2 + 1) + \omega(\pm\nu_1 \pm \nu_2) \quad . \tag{1.0.31}$$

Plus récemment, des systèmes ont été étudiés dans des espaces en deux dimensions de courbure constante [10] et non constante [11]. Une étude systématique et très détaillée a été entreprise des systèmes quadratiquement superintégrables [12,13] et de nombreux résultats ont été obtenus. Le portrait global qui a émergé est que les systèmes superintégrables possèdent des propriétés très intéressantes du point de vue de la physique et des mathématiques. En mécanique classique, ils ont les propriétés suivantes :

1. Toutes les trajectoires sont contraintes à une variété de dimension n-k dans l'espace de phase. Dans le cas d'un système maximalement superintégrable (2n-1 intégrales), toutes les trajectoires bornées sont fermées et le mouvement est périodique [14].

2. Les systèmes quadratiquement superintégrables sont multiséparables, c'est-à-dire que l'équation correspondante d'Hamilton-Jacobi permet la séparation de variable dans plus d'un système de coordonnées.

3. Les intégrales du mouvement ont une intéressante structure non-abélienne sous le crochet de Poisson. Cette structure peut prendre la forme d'une algèbre de Lie

de dimension finie, d'une algèbre de Kac-Moody [15] ou d'une algèbre polynomiale [16,17,18].

En mécanique quantique, les systèmes superintégrables ont les propriétés suivantes :

1. Les niveaux d'énergie sont dégénérés.

2. Les systèmes quadratiquement superintégrables sont multiséparables, c'est-à-dire que l'équation correspondante de Schrödinger permet la séparation de variable dans plus d'un système de coordonnées.

3. Tous les exemples de systèmes maximalement superintégrables dans un espace euclidien sont exactement résolubles. P.Tempesta, A.turbiner et P.Winternitz ont émis la conjecture que cela est vrai en général dans un espace euclidien [19].

4. Les intégrales du mouvement forment une algèbre non-abélienne sous le commutateur. Ces algèbres peuvent être des algèbres de Lie de dimension finie [20,21,22], de Kac-Moody [15] ou polynomiales [16,17,18].

5.Nous allons énoncer une dernière propriété, mais qui concerne à la fois les systèmes superintégrables classiques et quantiques. Dans le cas des systèmes quadratiquement superintégrables, les mêmes potentiels sont superintégrables en mécanique classique et quantique. Toutefois, nous savons que cette propriété n'est pas partagée pour les sytèmes avec des intégrales d'ordre plus élevé [23].

1.1. Références

[1] H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley, 638 pages (1980).
[2] P.Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equation, Springer, New York, 513 pages (1986).
[3] V.I. Arnold, Mathematical Methods in Classical Mechanics, Springer-Verlag,

New York, 509 pages (1980).

[4] C.Cohen-Tannoudji, B.Diu et F.Laloë, Mécanique quantique I, Hermann, 1973, Paris, 890 pages.

[5] L. Landau et E.Lifchitz, Mécanique Quantique, Edition Mir, Moscou, 689 pages (1967)

[6] C.Bender, S.Boettcher et P.Meisinger, J.Math.Phys. 40, 2201-2229 (1999) ; A.Mostafazadeh, J.Math. Phys., 43, 205-214 (2002) ; M.Znojil,Nucl. Phys. B662, 554-562 (2003) ; M.Znojil, Phys. Lett. A 259, 220-223 (1999).

[7] J.Fris, V.Mandrosov, Ya.A.Smorodinsky, M.Uhlir et P.Winternitz, Phys.Lett. 16, 354-356 (1965).

[8] P.Winternitz, Ya.A.Smorodinsky, M.Uhlir et I.Fris, Yad.Fiz. 4, 625-635 (1966). (Traduction anglaise dans Sov. J.Nucl.Phys. 4, 444-450 (1967)).

[9] A.A.Makarov, Ya.A.Smorodinsky, Kh.Valiev and P.Winternitz, Nuovo Cimento, A 52, 1061-1084 (1967).

[10] E.G.Kalnins, J.M.Kress, W.Miller Jr et G.S.Pogosyan, J.Math.Phys. A34, 4705-4720 (2001).

[11] E.G.Kalnins, J.M.Kress, W.Miller Jr et P.Winternitz, J.Math.Phys. 44(12) 5811-5848 (2003).

[12] E.G.Kalnins, J.M.Kress et W.Miller Jr, J.Math.Phys. 46, 053509.1-28 (2005) ; 46, 053510.1-15 (2005) ; 46, 103507.1-28 (2005) ; 47, 043514.1-26 (2006).

[13] E.G.Kalnins, W.Miller Jr et G.S.Pogosyan, J.Math.Phys. 47, 033502.1-30 (2006) ; 48, 023503.1-20 (2007).

[14] N.N. Nekhoroshev, Trans. Moscow Math. Soc. 26, 180-198 (1972).

[15] J.Daboul, P.Slodowy et C.Daboul, Phys.Lett. B317, 321-328 (1993).

[16] Ya.I.Granovsky, A.S.Zhedanov et I.M.Lutzenko, Ann. Phys. (New York) 217, 1, 1-20 (1992).

[17] P.Létourneau et L.Vinet, Ann. Phys. (New York) 243, 144-168 (1995).

[18] C.Daskaloyannis, J.Math. Phys. 42, 1100-1119 (2001).

[19] P.Tempesta, A.Turbiner et P.Winternitz, J.Math.Phys. 42, 4248-4257 (2001).

[20] V.Fock, Z.Phys. 98, 145-154 (1935).

[21] V.Bargmann, Z.Phys. 99, 576-582 (1936).

[22] J.M.Jauch et E.L.Hill, Phys.Rev. 57, 641-645 (1940).

[23] J.Hietarinta, J.Math. Phys. 25, 1833-1840 (1984); Phys. Lett. A246, 97-104 (1998).

Chapitre 2

SYMÉTRIE, SUPERSYMÉTRIE ET STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Nous allons débuter par donner quelques définitions importantes portant sur les algèbres de Lie [1,2] et ensuite nous allons voir comment celles-ci apparaissent dans le cadre de systèmes superintégrables en mécanique classique et quantique.

Définition 2.0.1. *Une algèbre de Lie L est un espace vectoriel sur un corps F muni d'une loi de multiplication appelée crochet de Lie et notée [X, Y] avec les propriétés suivantes : :*
(1) $X, Y \in L$, $[X, Y] \in L$
(2) $[X, \alpha\ Y + \beta\ Z] = \alpha\ [X, Y] + \beta\ [X, Z]$, $X, Y, Z \in L$, $\alpha, \beta \in F$
(3) $[X, Y] = -[Y, X]$
(4) $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

Proposition 2.0.1. *Soit L une algèbre de Lie de dimension finie (réelle ou complexe) et* $\{e_1, ..., e_n\}$ *une base de L. Alors,* $\forall i, j$ $[e_i, e_j]$ *peut être écrit uniquement dans la forme :*

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k \quad . \tag{2.0.1}$$

Les coefficients c_{ij}^k sont appelés les constantes de structure de l'algèbre de Lie.

Définition 2.0.2. *L'algèbre universelle enveloppante $U(L)$ est générée par tous les polynômes ordonnés des générateurs de l'algèbre de Lie. L'algèbre de Lie est une sous-algèbre de $U(L)$.*

Définition 2.0.3. *Le centre de l'algèbre universelle enveloppante est un ensemble d'opérateurs très importants dans les applications en physique que l'on nomme opérateurs de Casimir.*

2.0.1. Systèmes superintégrables et méthodes algébriques

Les potentiels de Kepler-Coulomb et de l'oscillateur harmonique sont maximalement superintégrables. Nous allons tout d'abord discuter du cas classique. Les intégrales du mouvement permettent d'obtenir de l'information sur un système en mécanique classique et quantique mais de manière différente. Les intégrales du mouvement permettent en mécanique classique de réduire le nombre d'intégrales à effectuer. Pour les potentiels maximalement superintégrables, on peut trouver les trajectoires de façon totalement algébrique. Les trajectoires pour le potentiel de Kepler sont bien connues [3]. Il possède, en plus d'une intégrale d'ordre un qui est le moment angulaire, une intégrale d'ordre deux appelée le vecteur de Laplace-Runge-Lenz. Ce vecteur a été discuté pour la première fois par Laplace dans son traité de mécanique céleste en 1799. Ce vecteur pointe dans la direction du périhélie.

L'hamiltonien du système Kepler est donné par l'expression suivante

$$H = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) - \frac{k}{r} \quad . \tag{2.0.2}$$

Toutes les composantes du moment angulaire et du vecteur de Laplace-Runge-Lenz commutent avec l'hamiltonien

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{P}}, \quad \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{L}} - \frac{mk\vec{\mathbf{r}}}{r}, \quad \{H, L_i\}_p = \{H, A_i\}_p = 0 \quad . \tag{2.0.3}$$

On introduit pour les trajectoires bornées ($E < 0$) $D = \frac{A}{\sqrt{-2mE}}$ et on obtient les relations algébriques suivantes

$$\{L_i, L_j\}_p = \epsilon_{ijl} L_l, \quad \{D_i, L_j\}_p = \epsilon_{ijl} D_l, \quad \{D_i, D_j\}_p = \epsilon_{ijl} L_l \quad . \tag{2.0.4}$$

C'est l'algèbre de Lie so(4).
Les sept quantités $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{L}}$ et H sont reliées par les équations

$$\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\mathbf{L}} = 0, \quad A^2 = m^2k^2 + 2mEL^2 \quad . \tag{2.0.5}$$

Cela nous donne bien 5 constantes du mouvement indépendantes. De ces intégrales du mouvement, on peut trouver algébriquement les trajectoires. En fait Kepler aurait pu trouver les trajectoires des planètes avant même la découverte du calcul différentiel et intégral. Nous considérons le calcul suivant

$$\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\mathbf{r}} = Arcos(\theta) = \vec{\mathbf{r}} \bullet (\vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{L}}) - mkr = l^2 - mkr \quad . \tag{2.0.6}$$

Nous obtenons avec Eq.(2.0.5) les trajectoires

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(1 + ecos(\theta)), \quad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}, \quad A = mke \quad . \tag{2.0.7}$$

Nous venons donc de trouver les trajectoires de façon totalement algébrique. Nous avons différents cas possibles correspondants respectivement aux hyperboles (e>1), paraboles (e=1), ellipses (e<1) et cercles (e=0).
Dans le cas quantique, nous allons voir que l'algèbre de symétrie nous sera utile pour déterminer le spectre de l'atome d'hydrogène [5]. Le spectre d'énergie est donné par la formule suivante

$$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} \quad , \tag{2.0.8}$$

où n est le nombre quantique principal.

Proposition 2.0.2. *L'analogue du vecteur de Laplace-Runge-Lenz en mécanique quantique est donné par*

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{2m}(\vec{\boldsymbol{p}} \times \vec{\boldsymbol{L}} - \vec{\boldsymbol{L}} \times \vec{\boldsymbol{p}}) - \frac{e^2}{r}\vec{\boldsymbol{r}} \quad . \tag{2.0.9}$$

Les composantes de ce vecteur et du moment angulaire commutent avec l'hamiltonien et sont reliées par la relation suivante

$$[H, L_i] = [H, R_i] = 0 \quad , R^2 = e^4 + \frac{2H(L^2 + \hbar^2)}{m} \quad . \tag{2.0.10}$$

Nous obtenons l'algèbre suivante

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, \quad [R_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}R_k, \quad [R_i, R_j] = -2i\frac{\hbar}{m}H\epsilon_{ijk}L_k \quad . \tag{2.0.11}$$

Nous regardons un sous espace avec valeur propre pour l'énergie E. Puisque nous sommes intéressés par les états liés, c'est un nombre négatif. Nous définissons $\vec{R'}$ et nous considérons la base suivante

$$\vec{R'} = \sqrt{\frac{-m}{2E}}\vec{R}, \quad \vec{J} = \frac{\vec{L} + \vec{R'}}{2}, \quad \vec{K} = \frac{\vec{L} - \vec{R'}}{2} \quad . \tag{2.0.12}$$

Nous obtenons les relations de commutation suivantes (so(4)≅su(2)⊕su(2))

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k, \quad [K_i, K_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}K_k, \quad [J_i, K_j] = 0 \quad . \tag{2.0.13}$$

Nous avons donc les valeurs propres et états propres suivants

$$\vec{J}^2\psi = j(j+1)\hbar^2\psi, \quad \vec{K}^2\psi = k(k+1)\hbar^2\psi, \quad j, k = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots \quad . \tag{2.0.14}$$

Nous avons les deux opérateurs de Casimir suivants

$$C_1 = \vec{J}^2 - \vec{K}^2, \quad C_2 = \vec{J}^2 + \vec{K}^2 \quad . \tag{2.0.15}$$

Nous trouvons les relations suivantes

$$C_1 = \vec{J}^2 - \vec{K}^2 = \vec{L} \bullet \vec{R'} = 0, \quad C_2 = 2\vec{K}^2, \quad C_2\psi = 2k(k+1)\hbar^2\psi \quad . \tag{2.0.16}$$

Nous pouvons également développer l'opérateur de Casimir selon $\vec{L}^2$ et $\vec{R}'$

$$C_2 = \frac{1}{2}(\vec{L}^2 - \frac{m}{2E}\vec{R}'^2) = -\frac{1}{2}\hbar^2 - \frac{me^4}{4E} \tag{2.0.17}$$

En utilisant les équations (2.0.16) et (2.0.17) nous trouvons la formule suivante

$$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2(2k+1)^2}, \quad k = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots \quad , \tag{2.0.18}$$

que l'on peut réécrire en prenant $n = 2k + 1$ de la manière suivante

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad . \tag{2.0.19}$$

Le groupe générateur du spectre (noninvariance) contient des éléments qui ne commutent pas avec l'hamiltonien, mais qui agissent comme des opérateurs d'échelles sur les fonctions d'onde des différents niveaux. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, nous avons le groupe de Sitter SO(4,1) ou le groupe conforme SO(4,2) pour les états liés [6].
Les algèbres de Lie ne sont pas suffisantes pour faire l'étude de nombreux systèmes superintégrables. Les quatre hamiltoniens de la section précédente sont des exemples de tels systèmes. Nous devons introduire des extensions des algèbres de Lie. Une méthode pour étudier de telles structures algébriques est d'utiliser des algèbres d'oscillateurs déformées.

2.0.2. Algèbres d'oscillateurs déformées et parafermioniques

Nous pouvons considérer une déformation générale de l'oscillateur harmonique [7].

Définition 2.0.4. *On considère l'algèbre d'oscillateur déformée*

$$[N, b^\dagger] = b^\dagger, \quad [N, b] = -b, \quad b^\dagger b = \Phi(N), \quad bb^\dagger = \Phi(N+1) \quad . \tag{2.0.20}$$

On retrouve l'algèbre de l'oscillateur harmonique en prenant $\Phi(N) = N$ On demande que la fonction de structure $\Phi(x)$ soit une fonction réelle avec les conditions suivantes

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(x) > 0, \quad pour \quad x > 0 \quad . \tag{2.0.21}$$

Théorème 2.0.1. *Ces contraintes imposent l'existence d'une représentation de type Fock, c'est-à-dire plus précisément*

$$N|n >= n|n >, \quad b^\dagger|n >= \sqrt{\Phi(N+1)}|n+1> \quad , \tag{2.0.22}$$
$$b|0 >= 0, \quad b|n >= \sqrt{\Phi(n)}|n-1> \quad .$$

Pour avoir une représentation de dimension finie on impose

$$\Phi(p+1) = 0 \quad . \tag{2.0.23}$$

2.0.3. Applications aux systèmes superintégrables

On peut également utiliser la théorie sur les algèbres d'oscillateurs déformées pour trouver le spectre de potentiels superintégrables dont les intégrales ne se ferment pas dans une algébre de Lie de dimension finie [8,9,10]. C.Daskaloyannis a montré comment des algèbres quadratiques permettent de faire l'étude de systèmes quadratiquement superintégrables. Nous pouvons considérer un système hamiltonien H avec deux intégrales A et B quadratiques dans les impulsions. On forme l'algèbre de Poisson quadratique la plus générale et on utilise l'identité de Jacobi et on obtient

$$\{A, B\}_p = C, \quad \{A, C\}_p = \alpha A^2 + 2\gamma AB + \delta A + \epsilon B + \zeta \tag{2.0.24}$$
$$\{B, C\}_p = \mu A^2 - \gamma B^2 - 2\alpha AB + \nu A - \delta B + z \quad .$$

L'opérateur de Casimir qui commute sous le crochet de Poisson avec les générateurs A, B et C est de la forme

$$K = C^2 - 2\alpha A^2 B - 2\gamma AB^2 - 2\delta AB - \epsilon B^2 - 2\zeta B + \frac{2}{3}\mu A^3 + \nu A^2 + 2zA \quad . \tag{2.0.25}$$

Dans le cas quantique, l'algèbre quadratique en utilisant l'identité de Jacobi est la suivante

$$[A,B]=C, \quad [A,C]=\alpha A^2+\gamma\{A,B\}+\delta A+\epsilon B+\zeta \tag{2.0.26}$$
$$[B,C]=\mu A^2-\gamma B^2-\alpha\{A,B\}+\nu A-\delta B+z \quad .$$

Il faut noter que dans ce cas $\{\}$ est l'anti-commutateur.

L'opérateur de Casimir commute avec les générateurs A,B et C de l'algèbre est de la forme

$$K=C^2-\alpha\{A^2,B\}-\gamma\{A,B^2\}+(\alpha\gamma-\delta)\{A,B\}+(\gamma^2-\epsilon)B^2+(\gamma\delta-2\zeta)B \tag{2.0.27}$$
$$+\frac{2\mu}{3}A^3+(\nu+\frac{\mu\gamma}{3}\alpha^2)A^2+(\frac{\mu\epsilon}{3}+\alpha\delta+2z)A \quad .$$

On cherche des réalisations en terme d'algèbres d'oscillateurs déformées de la forme

$$A=A(N), B=b(N)+b^{\dagger}\rho(N)+\rho(N)b \quad . \tag{2.0.28}$$

On peut donc trouver $A(N)$, $b(N)$ et $\rho(N)$. On obtient deux cas. Pour $\gamma\neq 0$, la fonction de structure $\Phi(N)$, qui apparaît dans les équations (2.0.20), est un polynôme d'ordre 10 en $N+u$ où u est une constante abritraire. Pour le cas $\gamma=0$, on obtient un polynôme d'ordre 4 en $N+u$. Les coefficients de ces polynômes sont des fonctions des constantes de structure de l'algèbre quadratique. On peut choisir une représentation dans laquelle l'opérateur de nombre parafermionique N est diagonal à l'opérateur de Casimir K. La base d'une telle représentation est la suivante $|k,n>$ et satisfait les équations

$$N|k,n>=n|k,n>, \quad K|k,n>=k|k,n> \quad . \tag{2.0.29}$$

L'opérateur de Casimir peut s'écrire comme un polynôme de l'Hamiltonien. Ainsi, le système que nous avons à résoudre pour obtenir le spectre d'énergie est le suivant

$$\Phi(0,u,k)=0, \quad \Phi(p+1,u,k)=0 \quad . \tag{2.0.30}$$

La condition $\phi(x) > 0$ pour x=1,2,...p nous donne des représentations qui sont unitaires [7] .

Nous allons présenter les résultats pour les 2 premiers hamiltoniens donnés par les équations (1.0.25) et (1.0.26). Nous allons donner les algèbres quadratiques, mais également les opérateurs de Casimir, les fonctions de structure et les spectres d'énergie correspondants.

Cas 1 :

$$\begin{gathered}
[A,B]=C \\
[A,C]=8\hbar^2A^2+16\hbar^4\{A,B\}-16\hbar^2HA+16\hbar^2\omega^2B-16\hbar^2(\mu_1+\mu_2)\omega^2 \quad (2.0.31) \\
[B,C]=16\hbar^4A^2-16\hbar^4B^2-8\hbar^2\{A,B\}+16\hbar^4A+16\hbar^2HB-16\hbar^2(\mu_2-\mu_1)-16\hbar^4H \\
K=16\hbar^2((\mu_2-\mu_1)^2\omega^2+4\mu_1H^2)-16\hbar^4(3H^2+2\hbar^2\omega^2-2(\mu_1+\mu_2)) \\
E=2\hbar\omega(p+1+\frac{\epsilon_1k_1+\epsilon_2k_2}{2}),\mu_1=(k_1^2-\frac{1}{4})\hbar^2,\mu_2=(k_2^2-\frac{1}{4})\hbar^2 \\
\Phi(x)=16\hbar^4x(p+1-x)(x+\epsilon_1k_1)(p+1-x+\epsilon_2k_2) \quad .
\end{gathered}$$

Cas 2 :

$$\begin{gathered}
[A,B]=C, \quad [A,C]=16\hbar^2\omega^2B \\
[B,C]=6\hbar^2A^2-16\hbar^2HA-8\hbar^2(\mu\omega^2-H^2)+6\hbar^4\omega^2 \\
K=64\hbar^4\omega^2H, \quad E=2\hbar\omega(p+1+\frac{\epsilon k}{2}) \\
\Phi=4\hbar^3x(p+1-x)(p+1-x+\epsilon k), \quad \mu=(k^2-\frac{1}{4})\hbar^2 \quad .
\end{gathered} \tag{2.0.32}$$

2.0.4. Supersymétrie

La supersymétrie a été tout d'abord introduite dans le contexte de la théorie des champs et des modèles pour décrire les interactions entres les particules. En 1968 H.Miyazawa a suggéré un modèle pour décrire les mésons et les baryons basé sur une superalgèbre [11]. Une superalgèbre consiste en une structure algébrique qui, contrairement aux algèbres de Lie, comporte des commutateurs mais également des anticommutateurs.

$$[B_i, B_j] = ic_{ij}^k B_k, \quad [F_\alpha, B_i] = s_{\alpha i}^\beta F_\beta, \quad \{F_\alpha, F_\beta\} = \gamma_{\alpha\beta}^i B_i \quad . \tag{2.0.33}$$

En 1971, il y a eu un article de Y.A.Gol'fand et E.P.Likhtman [12] dans lequel ceux-ci ont étendu l'algèbre du groupe de Poincaré a une superalgèbre. L'algèbre du groupe de Poincaré est donnée par les relations de commutation suivantes

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_\mu, M_{\rho,\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho} P_\sigma - \eta_{\mu\sigma} P_\rho), \tag{2.0.34}$$

$$[M_{\mu,\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho}).$$

Durant l'année 1971, il y eu deux autres articles importants [13,14] de A.Neveu, J.H.Schwarz et P.Ramond dans lesquels des modèles de théorie des cordes étaient développés dans le but de décrire les hadrons et dans lesquels on suggérait d'introduire des champs fermioniques. Cette même année, il y eu également un article de J.-L.Gervais et B.Sakita [15] dans lequel on introduisait une action avec de tels champs fermioniques et dans lequel on montrait que sous certaines conditions cette théorie permettait une symétrie dans laquelle on échangeait les champs bosoniques et fermioniques. C'était toutefois une théorie en deux dimensions. En

1972, D.V.Volkov et V.P.Akulov ont formulé une théorie des champs supersymétrique en 4 dimensions, mais toutefois non renormalisable [16]. Ils ont également introduit le concept de brisure spontanée de la supersymétrie. C'est en 1974, en ignorant l'existence même des articles de Y.A.Gol'fand et E.P.Likhtman et de D.V.Volkov et V.P.Akulov que J.Wess et B.Zumino ont formulé une théorie des champs supersymétrique en 4 dimensions renormalisable [17,18]. Durant cette année, Wess et Zumino ont publié un autre article dans lequel ils discutaient l'apparente violation du théorème de Coleman-Mandula et du fait que les générateurs donnaient lieu à des relations d'anticommutation [19].

En 1967, soit quelques années avant l'introduction de théories des champs supersymétriques, S.Coleman et J.Mandula ont étudié toutes les symétries possibles de la matrice de diffusion S dans le cadre de la théorie des champs quantiques. Leur résultat est important et porte le nom de théorème de Coleman-Mandula. Nous allons énoncer ce théorème [20,21].

Théorème 2.0.2. *Si l'on restreint l'ensemble des symétries continues à celui généré par une algèbre de Lie, alors l'ensemble de tous les générateurs possibles sont le tenseur de Lorentz $M_{\mu\nu}$, le vecteur de Lorentz P_μ et les scalaires de Lorentz. $M_{\mu\nu}$ et P_μ engendrent le groupe de Poincaré et les symétries additionnelles, qui consistent en des scalaires de Lorentz et sont des symétries internes.*

En plus des relations données par l'équation (2.0.34) nous avons également, lorsque l'on ajoute les générateurs du groupe de symétrie interne, les relations de commutation suivantes

$$[B_r, B_s] = ic^t_{rs} B_t, \quad [B_r, P_\mu] = [B_r, M_{\mu\nu}] = 0 \quad . \tag{2.0.35}$$

L'isospin, la couleur et le nombre baryonique sont des exemples de symétries internes. Toutefois, cette restriction aux algèbres de Lie n'a pas de véritable assise et il est possible d'ajouter à l'algèbre du groupe de Poincaré d'autres générateurs pour obtenir une superalgèbre. Les limitations provenant d'un examen détaillé du théorème de Coleman-Mandula et des identités de Jacobi d'une superalgèbre sont souvent mentionnées en tant que théorème de Haag-Lopuszański-Sohnius [22]. Nous avons donc pour l'algèbre de supersymétrie en plus des relations de l'algèbre de Poincaré et du groupe de symétries internes les relations suivantes [20,21,23] :

$$[Q_{\alpha i}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta} Q_{\beta i}, \quad \{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}^{\dagger}\} = 2\delta_{ij}(\sigma^{\mu})_{\alpha\beta} P_{\mu}, \quad [Q_{\alpha i}, P_{\mu}] = [Q_{\alpha i}^{\dagger}, P_{\mu}] = 0, \tag{2.0.36}$$

où l'index i dans $Q_{\alpha i}$ indique les différents 2-spineurs (de Weyl) qui peuvent être présents et vont de 1 à N. Il ne faut pas confondre N qui correspond ici au nombre de 2-spineurs avec celui que nous avons utilisé dans l'algèbre d'oscillateur déformée qui était le opérateur de nombre parafermionique. L'indice α correspond à l'une des deux composantes des spineurs. On trouve pour chacune des valeurs de l'index i

$$\sum_{\alpha}^{2} \{Q_{\alpha i}, Q_{\alpha i}^{\dagger}\} = 2tr(\sigma^{\mu}) P_{\mu} = 4P_0 \quad . \tag{2.0.37}$$

On définit $H \equiv P_0$. C'est cette dernière relation qui est au coeur de la mécanique quantique supersymétrique.

Définition 2.0.5. *Pour avoir une supersymétrie non brisée, on doit avoir*

$$Q_{\alpha}|0>= Q_{\alpha}^{\dagger}|0>= 0 \quad . \tag{2.0.38}$$

Nous allons maintenant donner une définition de la mécanique quantique supersymétrique due à E.Witten [24]. On suppose que nous avons un système quantique qui est caractérisé par un hamiltonien H agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On postule l'existence de N opérateurs hermitiens Q_i=$Q_i^{\dagger}$, i=1,2,...,N, qui agissent également sur cet espace de Hilbert. Il ne faut pas confondre cet indice i avec l'indice α des spineurs.

Définition 2.0.6. *Un système quantique, qui est caractérisé par l'ensemble* $\{H, Q_1, ..., Q_N; \mathcal{H}\}$, *est dit supersymétrique si la relation d'anti-commutation suivante est valide :*

$$\{Q_i, Q_j\} = H\delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, ..., N. \tag{2.0.39}$$

Les opérateurs Q_i *sont appelés supercharges [21,25].*

Proposition 2.0.3. *De la relation d'anti-commutation fondamentale suit immédiatement*

$$H = 2Q_1^2 = 2Q_2^2 = ... = 2Q_N^2 = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} Q_i^2 \tag{2.0.40}$$

Les supercharges sont des constantes du mouvement si elles ne dépendent pas explicitement du temps :

$$[H, Q_i] = 0 \quad \forall i = 1, 2, ..., N. \tag{2.0.41}$$

Définition 2.0.7. *Un système quantique supersymétrique est dit avoir une supersymétrie non brisée si l'énergie de son état fondamental est 0* ($E_0 = 0$)*. Pour un état fondamental avec une énergie strictement positive* $E_0 > 0$*, la supersymétrie est dite brisée.*

De manière analogue

Proposition 2.0.4. *Pour une bonne supersymétrie, l'état fondamental est annihilé par les supercharges*

$$Q_i|\Psi_0 >= 0 \tag{2.0.42}$$

Si la supersymétrie est brisée il existe au moins un i pour lequel

$$Q_i|\Psi_0 >\neq 0 \quad . \tag{2.0.43}$$

Un modèle très important est celui introduit par E.Witten [24] avec N=2. Nous définissions deux supercharges par les équations suivantes :

$$Q_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{P}{\sqrt{2m}} \otimes \sigma_1 - W(x) \otimes \sigma_2), \tag{2.0.44}$$

$$Q_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{P}{\sqrt{2m}} \otimes \sigma_2 + W(x) \otimes \sigma_1), \tag{2.0.45}$$

$W(x)$ est une fonction réelle qui est appelée le superpotentiel. L'hamiltonien H est donc donné par

$$H := 2Q_1^2 = 2Q_2^2, \tag{2.0.46}$$

et a la forme explicite suivante

$$H = (\frac{P^2}{2m} + W^2(x)) \otimes \mathbf{1} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \otimes \sigma_3. \tag{2.0.47}$$

Les matrices de Pauli sont données par les expressions suivantes

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.0.48}$$

Nous avons donc

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \tag{2.0.49}$$

où

$$H_{1,2} := \frac{P^2}{2m} + W^2(x) \mp \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \tag{2.0.50}$$

On peut introduire les supercharges suivantes

$$Q := \frac{1}{\sqrt{2}}(iQ_1 + Q_2), \quad Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(-iQ_1 + Q_2) \tag{2.0.51}$$

et nous avons les relations suivantes pour la superalgèbre

$$\{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0, \quad [H, Q] = [H, Q^\dagger] = 0, \quad \{Q, Q^\dagger\} = H \quad . \tag{2.0.52}$$

Cette dernière relation est souvent utilisée pour introduire directement la supersymétrie en mécanique quantique. Cette approche est plus directement reliée à l'algèbre que nous avons présentée dans le cadre des théories des champs supersymétriques.

Proposition 2.0.5. *Si l'hamiltonien H_1 possède un mode zéro $|\phi_0^{(1)}>$, on peut choisir*

$$|\Psi_0>=\begin{pmatrix}|\phi_0^{(1)}> \\ 0\end{pmatrix} \tag{2.0.53}$$

et nous avons

$$H|\Psi_0>=0. \tag{2.0.54}$$

Définition 2.0.8 (Index de Witten). *On peut introduire l'index de Witten que l'on note $\triangle$. Par $\eta_{1,2}$, on dénote le nombre de modes zéro dans le sous espace $\mathcal{H}^{1,2}$.*

$$\triangle=\eta_1-\eta_2 \quad . \tag{2.0.55}$$

Si l'idée d'une symétrie entre les bosons et les fermions et de supersymétrie en théorie quantique des champs est plutôt récente et remonte aux années 70, la mécanique quantique supersymétrique est quant à elle également reliée à des travaux de recherches ayant paru dans des articles bien antérieurs de G.Darboux, T.F.Moutard, E.Schrödinger, L.Infeld et T.E.Hull [26,27,28,29].

Nous allons voir dans les chapitres suivants comment la superintégrabilité avec des intégrales d'ordre trois est reliée à la mécanique quantique supersymétrique et comment cette dernière peut nous aider à résoudre des systèmes en mécanique quantique. Les systèmes de l'oscillateur harmonique et du potentiel de Kepler-Coulomb possèdent une telle structure supersymétrique [21]. Une large littérature est dévolue à la supersymétrie en mécanique quantique et, avec le temps, de nombreuses classes de systèmes supersymétriques ont été investiguées [21,25]. La supersymétrie a apporté des contributions à plusieurs domaines tels que la physique nucléaire, la physique statistique, la matière condensée, la physique atomique et la mécanique quantique [21]. Dans les dernières années, plusieurs articles ont porté sur la recherche des états cohérents et en particulier pour des systèmes générés par la supersymétrie [30,31,32].

2.1. Références

[1] B.C.Hall, Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, Springer, New-York, 351 pages (2003).

[2] J.Fuchs et C.Schweigert, Symmetries, Lie Algebras and Representations, Cambridge University Press, Cambridge, 438 pages (1997).

[3] H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley, 638 pages (1980).

[4] J.M Jauch et E.L Hill, Phys Rev, 57, 641-645 (1940).

[5] G. Baym, Lectures on Quantum Mechanics, Addison-Wesley, 594 pages (1973).

[6] A.O. Barut et E. Brittin, Lectures in Theoretical Physics, De Sitter and Conformal Groups and their Applications, Volume XIII, Colorado, 440 pages (1971).

[7] C. Daskaloyannis, J.Phys.A : Math. Gen. 24, L789-L794 (1991).

[8] D. Bonatos, C. Daskaloyannis et K. Kokkotas, Phys. Rev. A (3) 50, 3700-3709 (1994).

[9] D. Bonatos, C. Daskaloyannis et K. Kokkotas, Phys. Rev. A (3) 48, R3407-R3410 (1993).

[10] C.Daskaloyannis, J.Math.Phys. 42, 1100-1119 (2001).

[11] H.Miyazawa, Phys.rev. 170, 1596-1590 (1968).

[12] Y.A.Gol'fand et E.P.Likhtman, JETP Lett. 13, 323-326 (1971).

[13] A.Neveu et J.H.Schwarz, Nucl.Phys. B31, 86-112 (1971).

[14] P.Ramond, Phys. Rev. D3, 2415-2418 (1971).

[15] J.-L.Gervais et B.Sakita, Nucl.Phys. B34, 632-639 (1971).

[16] D.V.Volkov et V.P.Akulov, Phys.Lett. 46B, 109-110 (1973).

[17] J.Wess et B.Zumino, Nucl.Phys. B70, 39-50 (1974) ; J.Wess et B.Zumino, Nucl.Phys. B78, 1-13 (1974).

[18] J.Wess et B.Zumino, Phys.Lett. 49B, 52-54 (1974).

[19] S.Coleman et J.Mandula, Phys.Rev. 159, 1251-1259 (1967).

[20] S.Weinberg, The Quantum Theory of Fields, volume III supersymmetry, 2000,

Cambridge University Press, Cambridge, 419 pages (2000).

[21] G.Junker, Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics, Springer, New York, 172 pages (1995).

[22] R.Haag, J.T.Lopuszański et M.Sohnius, Nucl.Phys. B88 257-274 (1975).

[23] M.Sohnius, Physics Reports, 128, 2 3, 39-204 (1985).

[24] E.Witten, Nucl.Phys. B188, 513-554 (1981).

[25] F.Cooper, A.Khare et U.Sukhatme, Phys.Rept. 251, 267-385 (1995).

[26] G.Darboux, C.R.Acad.Sci. Paris, 94, 1456-1459 (1882)

[27] T.F.Moutard, C.R.Acad.Sci. Paris, 80, 729-733 (1875), J.de L'École Politech., 45, 1-21 (1879).

[28] E.Schrodinger, Proc.Roy. Irish Acad., 46A, 9-16 (1940), 47A, 53-54 (1941).

[29] L.Infeld et T.E.Hull, Rev.Mod.Phys. 23, 21-68 (1951).

[30] D.J.Fernández, V.Hussin et O.Rosas-Ortiz, J.Phys.A : Math.Theor. 40 6491-6511 (2007).

[31] D.J.Fernández et V.Hussin, J.Phys. A 32 3603-3619 (1999).

[32] D.J.Fernández, V.Hussin et L.M.Nieto, J.Phys. A 27 3547-3564 (1994).

Chapitre 3

SUPERINTÉGRABILITÉ AVEC INTÉGRALES D'ORDRE TROIS

Il y a plusieurs motivations du point de vue des mathématiques et de la physique à la recherche de potentiels superintégrables avec des intégrales d'ordre plus élevé que deux. Les potentiels superintégrables sont très présents en physique. En plus de l'oscillateur harmonique et du système de Kepler-Coulomb, on peut penser au potentiel de Hartmann [1] qui est utilisé en chimie pour décrire la molécule de benzène et qui est un potentiel superintégrable. Il y a aussi le système de Calogero-Moser-Sutherland [2] décrivant l'interaction de plusieurs particules et qui est maximalement superintégrable. Certains potentiels nouveaux pourraient donc modéliser certains phénomènes naturels en matière condensée, physique atomique ou en physique nucléaire. De plus, un potentiel superintégrable peut être traité avec des méthodes algébriques. À la fin du chapitre 1, nous avons donné plusieurs propriétés des systèmes superintégrables qui les rendent intéressants. Il importe de poursuivre l'étude des systèmes superintégrables en mécanique classique et quantique avec des intégrales d'ordre plus élevé, de déterminer lesquelles des propriétés énoncées sont partagées par tous les systèmes superintégrables. D'un point de vue plus mathématique, les structures algébriques obtenues de ces systèmes deviennent des objets d'étude intéressants en soi qui peuvent avoir des applications dans bien d'autres domaines de la physique.

La recherche de potentiel avec une intégrale d'ordre trois dans les impulsions a débuté avec Drach en 1935 [3]. Il a considéré des potentiels classiques dans le plan complexe en deux dimensions qui possèdent une intégrale d'ordre trois. Il a trouvé dix types de potentiel. Ces articles sont très peu détaillés sur la méthode et les calculs. Il semble, à notre connaissance, qu'il n'est pas évident que cette liste soit complète ou non. Dans les années quatre-vingt, les intégrales d'ordre 3 ont été discutées par Hietarinta de même que certains potentiels périodiques particuliers unidimensionnels [4]. Dans ce cas particulier, l'intégrale d'ordre trois n'était pas indépendante de l'hamiltonien. Toutefois, celle-ci permettait d'obtenir une équation différentielle d'ordre un et de résoudre le problème. Dans cet article, il montrait donc que, même dans le cas où le système n'est pas superintégrable, l'intégrale d'ordre trois peut néanmoins être très utile. Plus récemment, les systèmes avec une intégrale d'ordre trois ont été étudiés par S.Gravel et P.Winternitz [5,6]. Cependant, il n'est pas assuré que cette intégrale d'ordre trois soit indépendante des intégrales d'ordre inférieur. Les systèmes avec une intégrale d'ordre trois, mais également une intégrale supplémentaire d'ordre 1, ont tout d'abord été traités [5]. On peut ne considérer que les termes impairs et laisser tomber les termes quadratiques, car les termes pairs et impairs commutent séparément.

En mécanique classique, on veut donc un opérateur X tel que $\{H, X\}_p = 0$ de la forme

$$X = \sum_{i+j+k=3} A_{ijk} L^i P_1^j P_2^k + g_1(x,y)P_1 + g_2(x,y)P_2 \quad . \tag{3.0.1}$$

On obtient le système d'équations différentielles suivant.

$$\begin{aligned} 0 &= g_1 V_x + g_2 V_y \\ (g_1)_x &= 3f_1(y)V_x + f_2(x,y)V_y \\ (g_2)_y &= f_3(x,y)V_x + 3f_4(x)V_y \\ (g_1)_y + (g_2)_x &= 2(f_2(x,y)V_x + f_3(x,y)V_y) \quad , \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

avec

$$\begin{aligned}
f_1(y) &= -A_{300}y^3 + A_{210}y^2 - A_{120}y + A_{030} \\
f_2(x,y) &= 3A_{300}xy^2 - 2A_{210}xy + A_{201}y^2 + A_{120}x - A_{111}y + A_{021} \\
f_3(x,y) &= -3A_{300}x^2y + A_{210}x^2 - 2A_{201}xy + A_{111}x - A_{102}y + A_{012} \\
f_4(x) &= A_{300}x^3 + A_{201}x^2 + A_{102}x + A_{003} \quad .
\end{aligned} \tag{3.0.3}$$

Dans le cas quantique nous avons

$$P_1 = -i\hbar\partial_x, \quad P_2 = -i\hbar\partial_y. \tag{3.0.4}$$

Nous cherchons une intégrale telle que $[H, X] = 0$ de la forme

$$X = \sum_{i+j+k=3} A_{ijk}\{L_3^i, P_1^j P_2^k\} + \{g_1(x,y), P_1\} + \{g_2(x,y), P_2\} \quad . \tag{3.0.5}$$

On obtient également 4 équations. On remarque la présence de la constante $\hbar$ dans la première, ce qui indique que les cas classique et quantique seront différents.

$$\begin{aligned}
0 &= g_1V_x+g_2V_y-\frac{\hbar^2}{4}(f_1V_{xxx}+f_2V_{xxy}+f_3V_{xyy}+f_4V_{yyy}+8A_{300}(xV_y-yV_x)+2(A_{210}V_x+A_{201}V_y)) \\
(g_1)_x &= 3f_1(y)V_x + f_2(x,y)V_y \\
(g_2)_y &= f_3(x,y)V_x + 3f_4(x)V_y \\
(g_1)_y + (g_2)_x &= 2(f_2(x,y)V_x + f_3(x,y)V_y)
\end{aligned} \tag{3.0.6}$$

Il y a deux types de potentiel avec une intégrale première d'ordre un : ceux invariants sous rotation et invariants sous translation. Ils doivent satisfaire l'équation suivante

$$aL_3V + bP_1V + cP_2V = 0 \quad . \tag{3.0.7}$$

Il y a deux cas possibles

$$a \neq 0, V = V(r), \quad X = L_3 \quad , \tag{3.0.8}$$

$$a = 0, b^2 + c^2 \neq 0, \quad V = V(x), \quad X = P_2 \quad . \tag{3.0.9}$$

Nous obtenons donc les potentiels invariants sous rotation classiques et quantiques $V(r) = \frac{\alpha}{r}$, $V(r) = \omega^2 r^2$ et les potentiels invariants sous translation classiques et quantiques $V(x) = ax$, $V(x) = \frac{a}{x^2}$.

Dans ces cas, il n'y a pas de potentiels superintégrables nouveaux et les intégrales cubiques ne sont que des conséquences des intégrales d'ordre un et deux. Par contre, certains potentiels particuliers sont seulement quantiques.
Nous avons le cas suivant :

$$\hbar^2 V'(x)^2 = 4(V(x) - A_1)(V(x) - A_2)(V(x) - A_3) \quad . \tag{3.0.10}$$

Il y a differents cas particuliers qui font apparaître les fonctions elliptiques de Jacobi.

$$V_1 = (\hbar\omega)^2 k^2 sn^2(\omega x, k), \quad V_2 = \frac{(\hbar\omega)^2}{sn^2(\omega x, k)}, \quad V_3 = \frac{(\hbar\omega)^2}{2(cn(\omega x, k) + 1)} \quad . \tag{3.0.11}$$

Un fait très intéressant est que ces potentiels apparaissent aussi dans la théorie des solitons. S.Gravel a discuté du cas de potentiels avec une intégrale d'ordre trois et une d'ordre deux, séparables en coordonnées cartésiennes [6] : $V(x, y) = V_1(x) + V_2(y)$. L'intégrale d'ordre deux est associée avec la séparation de variables. Il y a trois autres classes de potentiel ayant une intégrale d'ordre trois et une intégrale d'ordre deux dans E_2. Ce sont les cas avec séparation de variables en coordonnées polaires, elliptiques et paraboliques. Le cas polaire a été traité par F.Tremblay et présenté dans un mémoire de maîtrise en physique [7]. Nous allons donner la liste de ces potentiels en débutant par les potentiels classiques. Nous allons écrire cette liste en séparant les potentiels reductibles de ceux irréductibles et en laissant tomber certains potentiels qui sont des cas particuliers d'un autre potentiel de la liste.

Cas classique :

Potentiels réductibles :

$V(x,y) = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$
$V(x,y) = \omega^2(x^2+y^2) + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{y^2}$
$V(x,y) = \omega^2(x^2+4y^2) + \frac{b}{x^2} + cy.$

Potentiels irréductibles :

$V(x,y) = \frac{\omega^2}{2}(9x^2+y^2)$
$V(x,y) = \frac{\omega^2}{2}y^2 + g(x)$
$V(x,y) = \beta_1^2\sqrt{|x|} + \beta_2^2\sqrt{|y|}$
$V(x,y) = a^2|y| + b^2\sqrt{|x|}$
$V(x,y) = a|y| + f(x),$
où $f(x)$ satisfait $(f(x)-bx)^2 f(x) = d$ et $g(x)$ satisfait

$$-9g^4(x) + 14\omega^2x^2g^3(x) + (16d - \frac{15}{2}\omega^4x^4)g^2(x) +$$
$$(\frac{3}{2}\omega^6x^6 - 2d\omega^2x^2)g(x) + cx^2 - d^2 - d\frac{\omega^2}{2}x^4 - \frac{1}{16}\omega^8x^8 = 0.$$

Cas quantique :

Potentiels réductibles :

$$V(x,y) = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$
$$V(x,y) = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{y^2}$$
$$V(x,y) = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + 4y^2) + \frac{b}{x^2} + cy.$$

Potentiels irréductibles avec fonctions rationnelles :

$$V(x,y) = \hbar^2[\frac{x^2+y^2}{8a^4} + \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2}]$$
$$V(x,y) = \hbar^2[\frac{1}{8a^4}(x^2 + y^2) + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x-a)^2}]$$
$$V(x,y) = \hbar^2[\frac{1}{8a^4}(x^2 + y^2) + \frac{1}{(y+a)^2} + \frac{1}{(y-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x-a)^2}]$$
$$V(x,y) = \frac{\omega^2}{2}(9x^2 + y^2)$$
$$V(x,y) = \frac{\omega^2}{2}(9x^2 + y^2) + \frac{\hbar^2}{y^2}$$
$$V(x,y) = \hbar^2[\frac{9x^2+y^2}{8a^4} + \frac{1}{(y-a)^2} + \frac{1}{(y+a)^2}].$$

Potentiels irréductibles avec transcendantes de Painlevé :

$$V(x,y) = \hbar^2(\omega_1^2 P_1(\omega_1 x) + \omega_2^2 P_1(\omega_2 y))$$
$$V(x,y) = ay + \hbar^2\omega_1^2 P_1(\omega_1 x)$$
$$V(x,y) = bx + ay + (2\hbar b)^{\frac{2}{3}} P_2^2((\frac{2b}{\hbar^2})^{\frac{1}{3}} x, 0)$$
$$V(x,y) = ay + (2\hbar^2 b^2)^{\frac{1}{3}}(P_2'((\frac{-4b}{\hbar^2})^{\frac{1}{3}} x, k) + P_2^2((\frac{-4b}{\hbar^2})^{\frac{1}{3}} x), k)$$
$$V(x,y) = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \epsilon\frac{\hbar\omega}{2}P_4'(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x) + \frac{\omega\hbar}{2}P_4^2(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x) + \omega\sqrt{\hbar\omega}\,x P_4(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x) + \frac{\hbar\omega}{3}(-\alpha + \epsilon).$$

$$P_1''(z) = 6P_1^2(z) + z$$
$$P_2''(z,\alpha) = 2P_2(z,\alpha)^3 + zP_2(z,\alpha) + \alpha$$
$$P_4''(z) = \frac{P_4'^2(z)}{2P_4(z)} + \frac{3}{2}P_4^3(z) + 4zP_4^2(z) + 2(z^2 - \alpha)P_4(z) + \frac{\beta}{P_4(z)}$$

Les fonctions P_1,P_2 et P_4 sont respectivement la première, la deuxième et la quatrième transcendantes de Painlevé [8].

Il y a aussi deux autres potentiels qui apparaissent dans la liste des 21 potentiels quantiques écrits en terme de la fonction elliptique de Weierstrass :

$V = \hbar^2 P(y) + V(x)$, V(x) est arbitraire,
$V = \hbar^2 (P(y) + P(x))$, P(x) est la fonction elliptique de Weierstrass .

Ces potentiels ne sont pas superintégrables et il existe un syzygy entre les intégrales et l'hamiltonien.

Dans cette thèse, nous allons vouloir, concernant le cas des potentiels classiques, trouver les trajectoires et, pour les cas quantiques, trouver les fonctions d'onde et le spectre d'énergie.

Résoudre l'équation de Schrödinger consiste, après avoir utilisé la méthode de la séparation de variables, à résoudre des problèmes aux valeurs propres consistant en des équations différentielles ordinaires. Il est possible d'appliquer la méthode de Frobenius [9]. Cette méthode a permis d'étudier bon nombre d'équations différentielles. Dans la littérature, on peut penser aux équations de Mathieux, Lamé, sphéroïdale [10] et hypergéométrique. Cette méthode peut toutefois, dans bien des cas, être très difficile à appliquer. Nous allons donc, dans les chapitres 5 et 6, utiliser plutôt des méthodes algébriques et voir comment l'intégrale supplémentaire d'ordre trois, qui n'est pas reliée à la séparation de variables, peut nous permettre d'obtenir de l'information sur le système.

Il est important de noter que les deuxième et quatrième transcendantes de Painlevé possèdent des solutions particulières pour certaines valeurs de leurs paramètres [11].

Voici deux théorèmes importants concernant la quatrième transcendante de Painlevé [11].

Théorème 3.0.1. *L'équation différentielle de la quatrième transcendante de Painlevé avec les paramètres (α,β) tel que l'une des deux relations suivantes est satisfaite :*

$$\beta = -2(\alpha\mu + 2n - 1)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \mu^2 = 1, \tag{3.0.12}$$

ou

$$\beta = -2n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.0.13}$$

a une famille a un paramètre de solutions écrites en terme des fonctions de Weber-Hermite.

Théorème 3.0.2. *L'équation de la quatrième transcendante de Painlevé avec les paramètres (α,β) admet une solution rationnelle si et seulement si les paramètres α et β satisfont l'une des deux relations suivantes :*

$$\alpha = n_1, \quad \beta = -(1 + 2n_2 - n_1)^2, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \tag{3.0.14}$$

ou

$$\alpha = n_1, \quad \beta = -\frac{2}{9}(6n_2 - 3n_1 + 1)^2, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}. \tag{3.0.15}$$

Pour chacune de ces valeurs, il existe une unique solution rationnelle.

3.1. Références

[1] H.Hartmann, Theor. Chim. Acta 24, 201-206 (1972) ; M.Kibler et P.Winternitz, J.Phys.A : Math.Gen. 20, 4097-4108 (1987).

[2] F.Calogero, J.Math.Phys. 10, 2197-2200 (1969) ; F.Calogero, J.Math.Phys. 12, 419-436 (1971) ; B.Sutherland, Phys. Rev. A4, 2019-2021 (1971) ; B.Sutherland, Phys. Rev. A5, 1372-1376 (1972) ; J.Moser, Adv. Math. 16, 197-220 (1975) ; S.Wojciechowsky, Phys. Letters A 95, 279-281 (1983).

[3] J.Drach, C.R. acad. Sci III, 200, 22-26 (1935) ; C.R.Acad.Sci III, 599-602 (1935).

[4] J.Hietarinta, J.Math.Phys.25, 1833-1840 (1984).

[5] S.Gravel, J. Math. Phys. 45 1003-1019 (2004).

[6] S.Gravel et P.Winternitz, J. Math. Phys. 43 5902-5912 (2002).

[7] F.Tremblay, Mémoire de maîtrise, Université de Montréal (2006).

[8] E.L.Ince, Ordinary Differential Equations (Dover, New York, 1944).

[9] F.M.Arscott, Periodic Differential Equations, Macmillan, New York (1964).

[10] P.M.Morse et H.Feshbach, Method of Theoretical Physics,Mc Graw-Hill, New York (1953).

[11] V.Gromak, I.Laine and S.Shimomura, Painlevé Differential Equations in the Complex Plane, Walter de Gruyter (2002).

DESCRIPTION DE L'ARTICLE 1

Le prochain chapitre est un article que mon directeur de thèse Pavel Wintertnitz et moi-même avons écrit. Je suis l'auteur principal de cet article dans lequel on présente les résultats sur les huit systèmes classiques superintégrables qui possèdent une intégrale d'ordre 2 et une autre d'ordre 3.

Cet article a été publié dans le Journal of Mathematical Physics dont voici la référence complète :

I.Marquette and P.Winternitz, Polynomial Poisson algebras for superintegrable systems with a third order integral of motion, J. Math. Phys. 48 012902 (2007).

Par souci d'une plus grande uniformité de la thèse, les références de cet article sont données à l'aide d'un numéro entre parenthèses plutôt que par un exposant et les équations sont dénotées par (4.i.j) plutôt que par (i.j).

Chapitre 4

POLYNOMIAL POISSON ALGEBRAS FOR SUPERINTEGRABLE SYSTEMS WITH A THIRD ORDER INTEGRAL OF MOTION

We present polynomial Poisson algebras for the 8 classical potentials in two-dimensional Euclidian space that separate in Cartesian coordinates and allow a third order integral of motion. Some of the classical superintegrable potentials do not coincide with quantum ones, but are their singular limits. We present the trajectories for all these classical potentials. We find that all bounded trajectories are periodic.

4.1. Introduction

The purpose of this article is to study the properties of a certain class of superintegrable systems in a real two-dimensional Euclidian space E_2. These are classical hamiltonian systems that allow three functionally independent integrals of motion. One of them is the Hamiltonian H. The other two are second and third order polynomials in the momenta, respectively. Moreover, in most of the article we shall restrict to the case when the potential allows separation of variables in Cartesian coordinates, so that we have

$$H = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) + f(x) + g(y) \tag{4.1.1}$$

$$A = \frac{1}{2}(P_1^2 - P_2^2) + f(x) - g(y) \tag{4.1.2}$$

and X_3 will have the general form

$$X_3 = \sum_{i+j+k=3} a_{ijk} L_3^i P_1^j P_2^k + k_1(x,y)P_1 + k_2(x,y)P_2, \tag{4.1.3}$$

where a_{ijk} are constant and L_3 is the angular momentum

$$L_3 = xP_2 - yP_1. \tag{4.1.4}$$

Superintegrable systems are Hamiltonian systems with more integrals of motion than degrees of freedom. In dimension n=2 the maximal possible number of functionally independent integrals is 2n-1=3 and that is the case we are considering.

A large body of literature exists on superintegrable systems, inspired by the superintegrability of the harmonic oscillator [1,2] and Kepler-Coulomb potentials [3,4]. A systematic search for superintegrable systems in E_2 and E_3 was conducted in the 1960ties [5,6,7]. Like much of the later work on superintegrable systems it was restricted to the case of second order integrals of motion [8-13]. This case turned out to have an intimate connection with the separation of variables in the Hamilton-Jacobi and Schrödinger equations.

An interesting discovery was that in general the quadratic integrals of motion do not generate finite dimensional Lie algebras, but more complicated algebraic structures, namely quadratic algebras[14-18].

Much less is known about integrable and superintegrable systems with third and higher order integrals of motion. In 1935 Drach found 10 different potentials in a complex Euclidian plane allowing a third order integral of motion in classical mechanics [19,20]. In 1984 Hietarinta [21] showed that in the case of integrals that are third, or higher order polynomials in momenta, quantum and classically integrable potentials may not coincide.

A systematic search for superintegrable systems involving at least one third order integral was started in 2002 [22]. It was shown that in the case of one first order and one third order integral the only classical superintegrable systems were known ones (like $V = \alpha r^2$ or $V = \alpha r^{-1}$) for which the third order integral was the product of a first and second order one. However, in the quantum case a new superintegrable potential of this type exists, namely $V_1(x,y) = (\hbar\omega)^2 k^2 sn^2(\omega x, k)$ where $sn(\omega x, k)$ is a Jacobi elliptic function. The classical limit ($\hbar \to 0$) is free motion! [22]

All classical and all quantum potentials allowing a second order integral of the form (4.1.2) and a third order integral (of any form) were found in Ref.23. The classical ones are all expressed in terms of elementary functions. The quantum ones are quite different and some of them involve elliptic functions and Painlevé transcendents [24]. We leave the quantum case for a future study and concentrate here on the classical superintegrable Hamiltonian systems of the form (4.1.1),...,(4.1.3)

In Section 2 we consider a general superintegrable Hamiltonian system in a two-dimensional space (not necessarily Euclidian) with a scalar potential. It allows one quadratic and one cubic integral of motion. We construct the most general cubic Poisson algebra generated by these integrals. We express the Casimir operator K of this algebra in terms of the Hamiltonian H. The general formalism of Section 2 is applied in Section 3 to the 8 existing superintegrable systems in E_2 allowing separation of variables in Cartesian coordinates and having an additional third order integral of motion. Solutions of the equation of motion and trajectories in these 8 systems are discussed in Section 4. Section 5 is devoted to conclusions.

4.2. Cubic Poisson algebras

We start out with a more general Hamiltonian system than (4.1.1)...(4.1.3). We will not assume that we have a natural Hamiltonian in E_2, but that we have a superintegrable system with a quadratic Hamiltonian and one second order and one third order integral of motion. We put

$$H = a(q_1, q_2)P_1^2 + 2b(q_1, q_2)P_1P_2 + c(q_1, q_2)P_2^2 + V(q_1, q_2)$$

$$A = A(q_1, q_2, P_1, P_2) = d(q_1, q_2)P_1^2 + 2e(q_1, q_2)P_1P_2 +$$

$$f(q_1, q_2)P_2^2 + g(q_1, q_2)P_1 + h(q_1, q_2)P_2 + Q(q_1, q_2) \tag{4.2.1}$$

$$B = B(q_1, q_2, P_1, P_2) = u(q_1, q_2)P_1^3 + 3v(q_1, q_2)P_1^2P_2 + 3w(q_1, q_2)P_1P_2^2$$

$$+x(q_1, q_2)P_2^3 + j(q_1, q_2)P_1^2 + 2k(q_1, q_2)P_1P_2 + l(q_1, q_2)P_2^2 + m(q_1, q_2)P_1 + n(q_1, q_2)P_2 + s(q_1, q_2)$$

where P_i and q_i are canonical momenta and coordinates and a,..,s are functions to be determined. Since A and B are integrals of motion we have.

$$\{H, A\} = \{H, B\} = 0 \tag{4.2.2}$$

where $\{,\}$ is the Poisson bracket

Since B is cubic in the momenta, we cannot expect $\{H, A$ and B$\}$ to generate a quadratic algebra, like those obtained in [14-18]. We will however try to close the algebra at the lowest order possible, namely 3. We put

$$\{A, B\} = C$$

$$\{A, C\} = \alpha A^2 + 2\beta AB + \gamma A + \delta B + \epsilon \tag{4.2.3}$$

$$\{B,C\} = \mu A^3 + \nu A^2 + \rho B^2 + 2\sigma AB + \xi A + \eta B + \zeta$$

Since we have $\{C, \{A, B\}\}$=0 the Jacobi identity reduces to

$$\{A, \{B,C\}\} = \{B, \{A,C\}\} \tag{4.2.4}$$

The Jacobi identity implies
$\rho = -\beta, \sigma = -\alpha, \eta = -\gamma$ and we obtain the cubic algebra.

$$\begin{aligned} \{A,B\} &= C \\ \{A,C\} &= \alpha A^2 + 2\beta AB + \gamma A + \delta B + \epsilon \\ \{B,C\} &= \mu A^3 + \nu A^2 - \beta B^2 - 2\alpha AB + \xi A - \gamma B + \zeta. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

The coefficients α , β and μ are constants, but the other ones can be polynomials in the Hamiltonian H. The degrees of these polynomials are dictated by the fact that H and A are second order polynomials in the momenta and B is a third order one. Hence C can be a fourth order polynomial. We have

$$\begin{gathered} \alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \mu = \mu_0 \\ \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 H, \delta = \delta_0 + \delta_1 H, \epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 H + \epsilon_2 H^2 \\ \nu = \nu_0 + \nu_1 H, \xi = \xi_0 + \xi_1 H + \xi_2 H^2 \\ \zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H + \zeta_2 H^2 + \zeta_3 H^3, \end{gathered} \tag{4.2.6}$$

where α_0,...,ζ_3 are constants. A Casimir operator K of a polynomial algebra is defined as an operator Poisson commuting with all elements of the algebra. For the algebra (4.2.5) this means

$$\{K, A\} = \{K, B\} = \{K, C\} = 0 \tag{4.2.7}$$

and this implies

$$K = C^2 - 2\alpha A^2 B - 2\beta A B^2 - 2\gamma A B - \delta B^2 - 2\epsilon B + \frac{1}{2}\mu A^4 + \frac{2}{3}\nu A^3 + \xi A^2 + 2\zeta A. \tag{4.2.8}$$

Thus K is a polynomial of order 8 in the momenta. since the Hamiltonian H also satisfies relations (4.2.7) we can expect K to be a polynomial in H and we write

$$K = k_0 + k_1 H + k_2 H^2 + k_3 H^3 + k_4 H^4 \tag{4.2.9}$$

where $k_0, .., k_4$ are constants. Note that eq. (4.2.9) together with (4.2.8) represents a polynomial relation between the integrals H, A, B and C in agreement with the fact that only 3 of them can be functionally independent.

4.3. CUBIC POISSON ALGEBRAS FOR CLASSICAL SUPERINTEGRABLE SYSTEMS

Let us now apply the formalism of Section 2 to all classical superintegrable potentials that separate in Cartesian coordinates and allow a third order integral of motion [22,23]. They have the form (4.1.1),...,(4.1.3) , so we have $a(q_1, q_2) = c(q_1, q_2) = 1$, $b(q_1, q_2) = 0$ in (4.2.1). Eight such systems exist, four of them are well-known, four first presented in Ref.23.

Case 1. The isotropic harmonic oscillator.

We have

$$H = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_1^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \tag{4.3.1}$$

The formalism of Section 2 applies, but we cannot expect it to provide anything new. indeed, in this case we have a well known u(2) algebra of first and second order integrals of motion :

$$L_3 = xP_2 - yP_1, X_1 = P_1^2 + \omega^2 x^2, X_2 = P_2^2 + \omega^2 y^2 \qquad (4.3.2)$$
$$X_3 = P_1 P_2 + \omega^2 xy$$

we can chose

$$A = P_1^2 - P_2^2 + \omega^2(x^2 - y^2) = X_1 - X_2 \qquad (4.3.3)$$
$$B = L_3 X_2 = xP_2^3 - yP_1P_2 - \omega^2 y^3 P_1 + \omega^2 xy^2 P_2$$

we obtain

$$\{A, B\} = C = -4X_2X_3$$
$$\{A, C\} = -16\omega^2 B \qquad (4.3.4)$$
$$\{B, C\} = 2A^3 - 6HA^2 + 8H^3$$

Thus, relations (4.2.5) are satisfied, but we remain in the enveloping algebra of u(2). The Casimir operator of the cubic algebra in this case is

$$K = C^2 + 16\omega^2 B^2 + 2A^4 - 6HA^3 + 8H^3 A = 16H^4 \qquad (4.3.5)$$

However, in this case H is simply the central element of the u(2) algebra (4.3.2) and it generates the center of the enveloping algebra of u(2)(a hence also of the cubic algebra).

Case 2. A quadratically superintegrable Hamiltonian [5,6]

$$H = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{y^2} \qquad (4.3.6)$$

The Hamiltonian allows two second order integrals of motion, namely

$$X_1 = P_1^2 - P_2^2 + \omega^2(x^2 - y^2) + \frac{2b}{x^2} - \frac{2c}{y^2} \qquad (4.3.7)$$

$$X_2 = L_3^2 + 2r^2(\frac{b}{x^2} + \frac{c}{y^2}).$$

The Hamiltonian H allows separation of variables in Cartesian and polar coordinates and also in elliptic ones. We shall identify $X_1 = A$ and the cubic integral B is equal to

$$B = -\frac{1}{8}\{X_1, X_2\} = xP_1P_2^2 - yP_1^2P_2 + xy(\frac{-2b}{x^3} + \omega^2 x)P_2 - xy(\frac{-2c}{y^3} + \omega^2 y)P_1 \tag{4.3.8}$$

$$\{A, B\} = C = 4(A^2 - 2HA - H^2 + 8\omega^2 X_2 - 16\omega^2(b + c)$$

$$\{A, C\} = -64\omega^2 B \tag{4.3.9}$$

$$\{B, C\} = -2A^3 + 8H^2A + 64(c - b)\omega^2 H + 32(c + b)\omega^2 A$$

$$K = C^2 + 64\omega^2 B^2 - A^4 + (8H^2 + 32(c + b)\omega^2)A^2 + 128(c - b)\omega^2 HA \tag{4.3.10}$$

$$= 16H^4 - 128\omega^2(c + b)H^2 + 1024\omega^4 bc$$

In this case there is no underlying finite-dimensional Lie algebra, however X_1, X_2 and H generate a quadratic Lie algebra [16,18]

$$\{X_1, X_2\} = C_q$$

$$\{X_1, C_q\} = -8X_1^2 + 16X_1H - 16\omega^2 X_2 + 32\omega^2(b + c) \tag{4.3.11}$$

$$\{X_2, C_q\} = 16X_1X_2 - 16HX_2 + 32H(c - b)$$

With $C_q = -B$ and the relations (4.3.9) of the cubic algebra are consequences of (4.3.11)

Case 3. A further quadratically superintegrable Hamiltonian [5,6] is

$$H = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}(4x^2 + y^2) + \frac{b}{y^2} + cx \tag{4.3.12}$$

The two second order integrals of motion are

$$A = P_1^2 - P_2^2 + \omega^2(4x^2 - y^2) - \frac{2b}{y^2} + 2cx \tag{4.3.13}$$

$$X_2 = xP_2^2 - yP_1P_2 + \frac{2bx}{y^2} - 2axy^2 - \frac{c}{2}y^2$$

and the Hamiltonian allows the separation of variables in Cartesian and parabolic coordinates. The third order integral is

$$B = -\frac{1}{4}\{X_1, X_2\} = P_1P_2^2 + (\frac{2b}{y^2} - \omega^2y^2)P_1 + (4\omega^2xy + cy)P_2 \tag{4.3.14}$$

$$\{A, B\} = C = 16\omega^2X_2$$

$$\{A, C\} = -64\omega^2B \tag{4.3.15}$$

$$\{B, C\} = 16\omega^2HA + 16\omega^2H^2 - 12\omega^2A^2 + 8c^2H - 4c^2A + 128\omega^4b$$

$$K = C^2 + 64\omega^2B^2 - 8\omega^2A^3 + (16\omega^2H - 4c^2)A^2 + (32\omega^2H^2 + 16c^2H + 256\omega^4b)A \tag{4.3.16}$$

$$= 64\omega^2H^3 + 16c^2H^2 - 512\omega^4bH - 128\omega^2bc^2$$

As in Case 2 we have a cubic algebra but all relations in it follow from the already known quadratic algebra [16,18].

Case 4. We have

$$H = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}(9x^2 + y^2) \tag{4.3.17}$$

Which is anisotropic harmonic oscillator with a rational frequency ratio ω_1/ω_2=$3/1$. The second and third order integrals are

$$A = P_x^2 - P_y^2 + \omega^2(9x^2 - y^2) \tag{4.3.18}$$

$$B = -yP_1P_2^2 + xP_2^3 + \frac{1}{3}\omega^2y^3P_1 - 3\omega^2xy^2P_2$$

$$\{A,B\} = C = -4P_1P_2^3 + 12\omega^2y^2P_1P_2 - 36\omega^2xyP_2^2 + 12\omega^4xy^3)$$

$$\{A,C\} = -144\omega^2 B \tag{4.3.19}$$

$$\{B,C\} = 2A^3 + 8H^3 - 6HA^2$$

$$K = C^2 + 144\omega^2B^2 + A^4 - 4HA^3 + 16AH^3 = 16H^4 \tag{4.3.20}$$

In this case the integral B is irreducible, i.e. it is not the Poisson bracket of lower order integrals. The cubic algebra (4.3.20) is related to a u(2) invariance algebra constructed by Jauch and Hill [1] for any anisotropic harmonic oscillator in E_2 with a rational frequency ratio. Their Lie algebra for the ratio ω_1/ω_2=3/1 is generated by the integrals.

$$\{H, \quad B_1 = \frac{C}{H-A}, \quad B_2 = \frac{B}{H-A}, \quad B_3 = A\} \tag{4.3.21}$$

It has actually been shown that in many cases in classical mechanics functions of integrals of motion can be constructed that generate finite dimensional Lie algebras [25].In the case of the anisotropic oscillator (4.3.17) it suffices to take the fractions B_1 and B_2 of the polynomials (4.3.17),...,(4.3.20). The Hamiltonians considered so far namely (4.3.1),(4.3.6),(4.3.12) and (4.3.17) are all superintegrable, both in the classical and quantum cases [23].

The remaining 4 cases are quite different in that the systems are integrable only in the classical case. They are all obtained as singular limits of quantum integrable systems. As we shall see, the quantum systems are quite different and the potentials are expressed in terms of Painlevé transcendents.

Case 5. The classical Hamiltonian and two integrals of motion in this case are

$$H = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + \beta_1^2\sqrt{|x|} + \beta_2^2\sqrt{|y|}, A = \frac{P_1^2}{2} - \frac{P_2^2}{2} + \beta_1^2\sqrt{|x|} - \beta_2^2\sqrt{|y|} \tag{4.3.22}$$

$$B = \beta_2^4P_1^3 + \epsilon\beta_1^4P_2^3 + 3\beta_2^4\beta_1^2\sqrt{|x|}P_1 + \epsilon 3\beta_1^4\beta_2^2\sqrt{|y|}P_2$$

$$\epsilon = 1, xy > 0 \qquad (4.3.23)$$

$$\epsilon = -1, xy < 0 \quad .$$

In the quantum case an integral of the type B exists if the potential V(x,y)=$V_1(x)+V_2(y)$ satisfies [23]

$$\hbar^2 V_1''(x) = 6V_1^2(x) - 6\beta_1^4 x \qquad (4.3.24)$$

$$\hbar^2 V_2''(y) = 6V_2^2(y) - 6\beta_2^4 y$$

The classical (and singular) limit $\hbar \to 0$ yields the potential in (4.3.22). The cubic algebra (4.2.5) in this case simplifies and we get

$$\{A, B\} = C = 3\beta_1^4\beta_2^4$$

$$\{A, C\} = 0 \qquad (4.3.25)$$

$$\{B, C\} = 0$$

$$K = 9\beta_1^8\beta_2^8 \qquad (4.3.26)$$

Thus $\{A, B, C\}$ actually generate a nilpotent Lie algebra, isomorphic to the Heisenberg algebra in one dimension (since C is constant).

We can see from eq. (4.3.24) that the quantum case will be completely different. Indeed eq. (4.3.24) can be solved in terms of the first Painlevé transcendent P_I [24].

Case 6. The classical Hamiltonian and two integrals of motion are

$$H = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}y^2 + V(x), A = \frac{P_1^2}{2} - \frac{P_2^2}{2} - \frac{\omega^2}{2}y^2 + V(x) \qquad (4.3.27)$$

$$B = -yP_1^3 + xP_1^2P_2 + (\frac{\omega^2}{2}x^2 - 3V)yP_1 - \frac{1}{\omega^2}(\frac{\omega^2}{2}x^2 - 3V)V_xP_2$$

where V satisfies a quartic equation

$$-9V(x)^4 + 14\omega^2 x^2 V(x)^3 + (6d - 3\frac{\omega^4}{4}x^4)V(x)^2 + (\frac{3\omega^6}{2}x^6 - 2\omega^2 x^2)V(x) \quad (4.3.28)$$
$$+(cx^2 - d - d\frac{\omega^4}{2}x^4 - \frac{\omega^8}{16}x^8) = 0$$

In the quantum case V satifies a fourth order differential equation [23]

$$\hbar^2 V^{(4)} = 12\omega^2 x V' + 6(V^2)'' - 2\omega^2 x^2 V'' + 2\omega^4 x^2 \quad (4.3.29)$$

that can be solved in terms of the Painlevé transcendent P_{IV} [24]. Eq. (4.3.28) is the solution of (4.3.29) for $h \to 0$ and c and d are integration constants. In general, eq. (4.3.28) has 4 roots and the expressions for them are quite complicated. A special case occurs if ω^2,c and d satisfy.

$$c = \frac{2^3\omega^8 b^3}{3^6}, d = \frac{\omega^4 b^2}{3^3} \quad (4.3.30)$$

where b is an arbitrary constant. Then eq. (4.3.28) has a double root and we obtain

$$V_{1,2}(x) = \frac{\omega^2}{18}(2b + 5x^2 \pm 4x\sqrt{b + x^2}) \quad (4.3.31)$$

$$V_3(x) = V_4(x) = (-\frac{\omega^2 b}{3^3} + \frac{\omega^2}{2}x^2) \quad (4.3.32)$$

For V(x) satisfying (4.3.28) the cubic algebra is

$$\{A, B\} = C$$
$$\{A, C\} = -4\omega^2 B \quad (4.3.33)$$
$$\{B, C\} = 8A^3 + 12HA^2 - 4H^3 - 4\frac{4b^2\omega^4}{27}A + \frac{4b^3\omega^6}{729}$$

$$K = C^2 + \omega^2 B^2 + 4A^4 + 8HA^3 - 4bA^2 + (-8H^3 + \frac{8b^3\omega^6}{729})A \quad (4.3.34)$$
$$= 4H^4 - \frac{4}{27}b^2\omega^4 H^2 + \frac{8b^3\omega^6}{729}H$$

Case 7. The classical Hamiltonian and two integrals of motion in this case are

$$H = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + a^2|y| + b^2\sqrt{|x|}, A = \frac{P_1^2}{2} - \frac{P_2^2}{2} - a^2|y| + b^2\sqrt{|x|} \qquad (4.3.35)$$

$$B = P_1^3 + 3b^2\sqrt{|x|}P_1 + \epsilon\frac{3b^4}{2a^2}P_2$$

$$\epsilon = -1, xy > 0 \qquad (4.3.36)$$

$$\epsilon = 1, xy < 0 \quad .$$

In the quantum case the potential is V(x,y)=ay + V(x) where V(x) satisfies

$$\hbar^2 V'' = 6V^2 - 6b^4 x, \qquad b \neq 0 \qquad (4.3.37)$$

This is solved in terms of the first Painlevé transcendent for $\hbar \neq 0$. For $\hbar = 0$ the singular limit is V=$b\sqrt{x}$. The cubic algebra in this case is very simple and reduces to a Lie algebra, the Heisenberg algebra as in Case 5. We have

$$\{A, B\} = C = 3b^4$$

$$\{A, C\} = 0 \qquad (4.3.38)$$

$$\{B, C\} = 0$$

$$K = 9b^8 \qquad (4.3.39)$$

Case 8. In this case we have

$$H = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + ay + V(x), \quad A = \frac{P_1^2}{2} - \frac{P_2^2}{2} - ay + V(x) \qquad (4.3.40)$$

$$B = aP_1^3 - bP_1^2P_2 + a(3V(x) - bx)P_1 - 2bV(x)P_2$$

where V(x) satisfies a cubic equation

$$V(x)^3 - 2bxV(x)^2 + b^2x^2V(x) - d = 0 \qquad (4.3.41)$$

This is again obtained from a singular limit of a second order nonlinear ODE in the quantum case. It is, for $\hbar \neq 0$, solved in terms of the Painlevé transcendent P_{II}. The cubic algebra in this case reduces to

$$\{A,B\} = C = 2ab(A+H)$$

$$\{A,C\} = 0 \tag{4.3.42}$$

$$\{B,C\} = -4a^2b^2(A+H)$$

$$K = 4a^2b^2H^2 \tag{4.3.43}$$

We see that (4.3.42) is actually a Lie algebra with centre H. If we put

$$A_1 = \frac{H+A}{2}, B_1 = -\frac{1}{2ab}B \tag{4.3.44}$$

We obtain the solvable decomposable Lie algebra

$$\{H_1, B_1\} = B_1, \{H_1, H\} = \{B_1, H\} = 0 \tag{4.3.45}$$

The cubic equation (4.3.41) can be taken to standard form by putting

$$V(x) = y(x) + \frac{2bx}{3} \tag{4.3.46}$$

We obtain

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \quad p = -(\frac{bx}{3})^2, \quad q = (\frac{bx}{3})^3 - \frac{d}{2} \tag{4.3.47}$$

This discriminant is

$$D = q^2 + p^3 = \frac{d^2}{4} - \frac{b^3dx^3}{27} \tag{4.3.48}$$

For D $<$ 0,i.e. $x^3 > \frac{27d}{4b^2}$ with d<0 or $x^3 < \frac{27d}{4b^2}$ with d>0 it has 3 real roots,
For D $>$ 0,i.e. $x^3 < \frac{27d}{4b^2}$ with d<0 or $x^3 > \frac{27d}{4b^2}$ with d>0 it has 1 real root y_1 and 2 complex ones,$y_3 = \bar{y}_2$.

The corresponding potentials are

$$V_1(x) = \frac{2bx}{3} + \frac{2^{1/3}b^2x^2}{3(2+d-2b^3x^3+3\sqrt{3}\sqrt{27d^2-4b^3dx^3})^{1/3}} \tag{4.3.49}$$

$$+\frac{(27d - 2b^3x^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{27d^2 - 4b^3dx^3})^{1/3}}{32^{1/3}}$$

$$V_2(x) = \frac{2bx}{3} + \frac{(1 + i\sqrt{3})b^2x^2}{32^{2/3}(2 + d - 2b^3x^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{27d^2 - 4b^3dx^3})^{1/3}} \tag{4.3.50}$$

$$+\frac{(1 - i\sqrt{3})(27d - 2b^3x^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{27d^2 - 4b^3dx^3})^{1/3}}{62^{1/3}}$$

$$V_3(x) = \frac{2bx}{3} + \frac{(1 - i\sqrt{3})b^2x^2}{32^{2/3}(2 + d - 2b^3x^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{27d^2 - 4b^3dx^3})^{1/3}} \tag{4.3.51}$$

$$+\frac{(1 + i\sqrt{3})(27d - 2b^3x^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{27d^2 - 4b^3dx^3})^{1/3}}{62^{1/3}}$$

Multiple roots occur for D=0.This happens (for x $\neq$ const) for d=0 only and then we have

$$V = bx \tag{4.3.52}$$

as a double root(and V=0 as the simple one). We can consider the particular Hamiltonian,

$$H = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + a^2|y| + b^2|x|, A = \frac{P_1^2}{2} - \frac{P_2^2}{2} - a^2|y| + b^2|x| \tag{4.3.53}$$

$$B = a^2P_1^3 - b^2P_1^2P_2 + 2a^2b^2|x|P_1 - 2b^4|x|P_2$$

4.4. Trajectories for classical superintegrable systems

If a Hamiltonian system is maximally superintegrable and satisfies certain analyticity properties, then all of its bounded trajectories are closed and the motion is periodic [26]. Here we shall discuss the trajectories for all the 8 systems of Section 3. The trajectories can be obtained in a uniform manner directly from the integrals of motion. Indeed in all cases we can put

$$\frac{1}{2}P_1^2 + f(x) = E_1 \tag{4.4.1}$$

$$\frac{1}{2}P_2^2 + g(y) = E_2 \tag{4.4.2}$$

$$B = \mu P_1^3 + \nu P_1^2P_2 + \rho P_1P_2^2 + \sigma P_2^3 + \phi P_1 + \psi P_2 = k \quad . \tag{4.4.3}$$

In (4.4.3) μ ,ν ,ρ and σ are low order polynomials in x and y, ϕ and ψ are functions of x and y (all of them known). The constants E_1 and E_2 are positive, k arbitrary. From (4.4.1) and (4.4.2) we obtain P_1^2 and P_2^2 in term of x and y, respectively. From eq(4.4.3) we obtain

$$(P_1^2(\mu P_1^2 + \rho P_2^2 + \phi)^2 - P_2^2(\nu P_1^2 + \sigma P_2^2 + \psi)^2)^2 + k^4 \qquad (4.4.4)$$

$$= 2k^2(P_1^2(\mu P_1^2 + \rho P_2^2 + \phi)^2 + P_2^2(\nu P_1^2 + \sigma P_2^2 + \psi)^2) \quad .$$

Substituting for P_1^2 and P_2^2 from (4.4.1) and (4.4.2) we obtain the equation for the trajectories. Directly from eq (4.4.1) and (4.4.2) we see that the motion is bounded if there exist two constants, x_o and y_o,such that we have

$$f(x) \geq 0, \quad x^2 > x_o^2, \quad g(y) \geq 0, y^2 > y_o \quad . \qquad (4.4.5)$$

This direct method of computing trajectories is universal, hence not necessarily convenient in any special case. For instance for the harmonic oscillator it gives a polynomial of order 16 in x and y which can then be simplified to a second order one. However it avoids the problem of integrating the equation of motion and then eliminating time.

Case 1. The trajectories of the harmonic oscillator are well known and are ellipses.

Case 2. The trajectories are given in [6] and are easily obtained by integrating the equation of motion :

$$x(t)^2 = \frac{E_1}{\omega^2} + \sqrt{\frac{E_1^2}{2\omega^4} - \frac{2b}{\omega^2}} sin(2\omega t + c_1) \qquad (4.4.6)$$

$$y(t)^2 = \frac{E_2}{\omega^2} + \sqrt{\frac{E_2^2}{2\omega^4} - \frac{2c}{\omega^2}} sin(2\omega t + c_2) \qquad (4.4.7)$$

Case 3. The trajectories are also given in [6] and are obtained as in Case 2.

$$x(t)^2 = \frac{-c}{4\omega^2} + \sqrt{\frac{E_1}{\omega^2} + \frac{c^2}{32\omega^2}} sin(2\omega t + c_1) \qquad (4.4.8)$$

$$y(t)^2 = \frac{E_2}{\omega^2} + \sqrt{\frac{E_2^2}{\omega^4} - \frac{2c}{\omega^2}} sin(2\omega t + c_2) \tag{4.4.9}$$

Case 4.The Case of the anisotropic oscillator is well known. The trajectories are what is called Lissajous figures.

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_1}{9\omega^2}} sin(3\omega t + c_1) \tag{4.4.10}$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{2E_2}{\omega^2}} sin(\omega t + c_2) \tag{4.4.11}$$

Case 5. The potential is

$$V = \beta_1^2 \sqrt{|x|} + \beta_2^2 \sqrt{|y|} \quad . \tag{4.4.12}$$

We find the trajectories using the equation (4.4.4). The bounded trajectories are closed. Examples are shown on Fig 5.

Case 6. We know from the Section 3 that the only particular case where two roots coincide is (4.3.30). The trajectories for the potentials $V_{1,2}(x)$ satisfy

$$y(t) = \sqrt{\frac{2E_2}{\omega^2}} sin(\omega t + c_2) \tag{4.4.13}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{10\omega^2}{9}x^2 \mp \frac{4\omega^2}{9}x\sqrt{b+x^2} + 2E_1}} = t + c_1 \tag{4.4.14}$$

The trajectories were obtained numerically directly from the equations of motion. We have closed trajectories and examples are shown on Fig 6. For $V_3(x)$ the potential is a shifted harmonic oscillator, so the trajectories are ellipses.

Case 7. The potential is

$$V = a^2|y| + b^2\sqrt{|x|} \tag{4.4.15}$$

We find the trajectories using equation (4.4.4). The bounded trajectories are closed. They are shown on Fig 7.

Case 8. There is the particular case

$$V = a^2|y| + b^2|x| \tag{4.4.16}$$

We use eq. (4.4.4) to calculate the trajectories. Again the bounded trajectories are closed. An example is shown on Fig 8.

4.5. Conclusion

The main results of this article are the study of the algebras of integrals of motion, presented in Sections 2 and 3 and the investigation of classical trajectories in Section 4.

In all 8 cases of superintegrable systems, separating in Cartesian coordinates and allowing a third order integral of motion, the integrals of motion generate a cubic Poisson algebra. In many cases this polynomial algebra is reducible that is it is a consequence of the existence of a simpler algebraic structure.

In 4 cases the simplest underlying structure is a Lie algebra. Thus in Case 1, the isotropic harmonic oscillator, the integrals of motion generate the u(2) algebra with the Hamiltonian as its central element. The third order operator B and the fourth order one C lie in the enveloping algebra of u(2).

In Case 5 the potential $V(x,y) = \beta_1^2\sqrt{|x|} + \beta_2^2\sqrt{|y|}$ is nonanalytical at the origin. In this case the Poisson bracket of the second and the third order integrals is a constant. Hence A,B and C generate the Heisenberg Lie algebra.

Case 7 with $V(x,y) = a^2|y| + b^2\sqrt{|x|}$ is similar to Case 5 in that A, B and C generate the Heisenberg Lie algebra (with C constant). In both of these cases the Lie algebra is actually

$$\{H\} \bigoplus \{A, B, C\} \tag{4.5.1}$$

i.e. the direct sum of a one-dimensional Lie algebra, generated by the Hamiltonian, and the Heisenberg algebra.

In Case 8 we have V(x,y)= ay + V(x) with V(x) satisfying the cubic equation (4.3.41), the integrals generate a solvable decomposable Lie algebra (4.3.45). The Hamiltonian H commutes with the elements of the two-dimensional solvable algebra.

The Case 2 and 3 are different. The Hamiltonians (4.3.6) and (4.3.12) are actually quadratically superintegrable and the third order integral B is the Poisson bracket of two second order ones. These second order integrals give rise to a quadratic Poisson algebra [15,16] and the cubic algebra of our Section 3 is an algebraic consequence of the quadratic one.

Finally, two irreducible cases remain. One is the Case 4, the anisotropic harmonic oscillator (4.3.17). We have a genuine third order polynomial algebra (4.3.19), (4.3.20) of polynomial integrals H,A,B and C of order 2,2,3 and 4, respectively. Somewhat artificially, we can construct the Lie algebra u(2) of eq. (4.3.21), using rational functions of these integrals.

Case 6 is again irreducible, i.e. we obtain the genuinely cubic polynomial algebra (4.3.33), (4.3.34), again involving two second order, one third order and one fourth order integral. The condition for this algebra to close is precisely that V(x) should satisfy the quartic equation (4.3.28).

To our knowledge, no classification of polynomial algebras exist, not even of quadratic ones, still less of cubic algebras. We can however see that the linear parts of the algebras of Case 4 and Case 6 are not isomorphic as Lie algebras. That of Case 4 is solvable, that of Case 6 is simple.

Trajectories are studied in Section 4 with examples on Fig 1,...,8. The most important result is that all finite trajectories are closed. We note that the potentials of Case 1 and 4 are analytic everywhere, so superintegrability implies periodic motion [26]. In cases 2 and 3 the potentials are singular along one or both coordinate axes, analytic elsewhere. In Case 5 the potential is nonanalytic with nonisolated branchpoints along the axes. That not withstanding, bounded trajectories turn out to be closed.

The functions $V_{1,2}(x)$ in Case 6 are nonanalytic for $x^2 = -b$ for b>0. Similar statements apply for Case 7. In Case 8 we have studied a psecial case when the cubic equation (4.3.41) has a double root. In this case we either have a linear potential $V(x,y) = \alpha x + \beta y$ with no bounded trajectories, or the nonanalytical one $V(x,y) = a^2|y| + b^2|x|$ (4.4.16) that we have investigated.

Our conclusion is that the bounded trajectories are always closed for the superintegrable potentials, wheter they are analytical, or not.

An investigation of the properties of superintegrable systems with a third order integral of motion is in progress.

Acknowledgments The authors thanks Frederick Tremblay for useful discussions. I.M. benefited from an FQRNT student fellowship.

4.6. References

[1] J.M.Jauch and E.L.Hill,On the problem of degeneracy in quantum mechanics, Phys Rev, 57, 641-645 (1940).

[2] M.Moshinsky and Yu.F.Smirnov, The Harmonic Oscillator In Modern Physics, Harwood, Amsterdam, 641-645 (1966).

[3] V.Fock, Zur Theorie des Wasserstoffsatoms, Z. Phys.98, 145-154 (1935).

[4] V.Bargmann, Zur Theorie des Wasserstoffsatoms, Z. Phys. 99, 576-582 (1936).

[5] J.Fris, V.Mandrosov, Ya.A.Smorodinsky, M.Uhlir and P. Winternitz, On higher symmetries in quantum mechanics, Phys. Lett. 16, 354-356 (1965).

[6] P.Winternitz, Ya.A.Smorodinsky, M.Uhlir and I.Fris, Symmetry group in classical and quantum mechanics , J.Nucl. Phys. (U.SS.R)4, 625-635 (1966).

[7]A.Makarov, Ya.A.Smorodinsky, Kh.Valiev and P.Winternitz, A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries, Nuovo Cim. A52, 1061-1084 (1967).

[8] E.G.Kalnins, J.M.Kress and W.Miller Jr, Second-order superintegrable systems in conformally flat spaces. I, II, III, J.Math.Phys, 46, 053509 28 pages, 053510 15 pages, 103507 28 pages,(2005).

[9] E.G.Kalnins, W.Miller Jr. and G.S.Pogosyan, Completeness of multiseparability in E2, C. J. Phys. A33, 4105-4120 (2000).

[10] M.B.Sheftel, P.Tempesta and P.Winternitz, Exact solvability of superintegrable systems, J.Math.Phys. 42, 659-673 (2001).

[11] P.Tempesta, A.V.Turbiner and P.Winternitz,Exact solvability of superintegrable systems, J.Math.Phys. 42, 4248-4257 (2001).

[12] N.W.Evans, Superintegrability in classical mechanics. Phys. Rev. A 41, 5666-5676 (1990).

[13] N.W.Evans, Group theory of the Smorodinsky-Winternitz system. J. Math.

Phys. 32, 3369-3375 (1991).

[14] Ya.I.Granovskii, A.S.Zhedanov and I.M.Lutzenko, Quadratic Algebra as a Hidden Symmetry of the Hartmann Potential, J. Phys. A24 3887-3894 (1991).

[15] P.Létourneau and L.Vinet, Superintegrable systems :Polynomial algebras and quasi-exactly solvable hamiltonians, Ann. Physics 243, 144-168 (1995).

[16] C.Daskaloyannis, Quadratic poisson algebras of two-dimensional classical superintegrable systems and quadratic associative algebras of quantum superintegrable systems, J.Math.Phys. 42, 1100-1119, (2001).

[17] D.Bonatsos, C.Daskaloyannis and K.Kokkotas, Deformed oscillator algebras for two-dimensional quantum superintegrable systems. Phys. Rev.A 50, 3700-3709 (1994).

[18] D.Bonatsos, C.Daskaloyannis and K.Kokkotas, Quantum-algebraic description of quantum superintegrable systems in two dimensions. Phys. Rev. A 48, R3407-R3410. 81S05 (1993).

[19] J.Drach, Sur l'intégration logique des équations de la dynamique à deux variables : Forces conservatrices. Intégrales cubiques. Mouvements dans le plan, C.R.acad. Sci III, 200, 22-26 (1935).

[20] J.Drach, Sur l'intégration logique et sur la transformation des équations de la dynamique à deux variables : Forces conservatrices. Intégrales. C.R.Acad. Sci III, 599-602 (1935).

[21] J.Hietarinta, Classical vs. Quantum integrability, J.Math.Phys. 25, 1833-1840 (1984).

[22] S.Gravel and P.Winternitz, Superintegrability with third-order integrals in quantum and classical mechanics, J. Math. Phys. 43 5902-5912 (2002).

[23] S.Gravel, Hamiltonians separable in Cartesian coordinates and thirdorder integrals of motion, J. Math. Phys. 45 1003-1019 (2004).

[24] E.L.Ince, Ordinary Differential Equations, Dover, New York, (1956).

[25] G.Gonora, P.Kosinski, M.Majenski and P.Mashenka, Symmetry algebras for superintegrable systems, J.Phys.A 39, 343-349 (2006).

[26] N.N.Nekhoroshev, Action-angle variables and their generalizations. Trudy Mskov. Mat. Obshch. 26, 181-198 (1972).

Figure captions

Fig1.A trajectory for $V = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$. Parameter $\omega^2 = 2$, $v_{xo} = -1.5$, $x_o = 5$, $v_{yo} = -1.2$, $y_o = -2$, t=[0,400]

Fig2.A trajectory for $\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{y^2}$. Parameter $\omega^2 = 2$,b=2 and c=3, $v_{xo} = -1.5$, $x_o = 5$, $v_{yo} = -1.2$, $y_o = -2$, t=[0,400]

Fig3.A trajectory for $\frac{\omega^2}{2}(4x^2 + y^2) + \frac{b}{y^2} + cx$. Parameter $\omega^2 = 1$,b=2 and c=3, $v_{xo} = -1.5$, $x_o = 5$, $v_{yo} = -1.2$, $y_o = -2$, t=[0,400]

Fig4.A trajectory for $\frac{\omega^2}{2}(9x^2 + y^2)$. Parameter $\omega^2 = 1$ and d=3, $v_{xo} = -1.5$, $x_o = 5$, $v_{yo} = -1.2$, $y_o = -2$, t=[0,400]

Fig5.A trajectory for $V = \beta_1^2\sqrt{|x|} + \beta_2^2\sqrt{|y|}$. Parameter $E_1 = E_2 = k = 1$

Fig6.A trajectory for $\frac{\omega^2}{18}(2b + 5x^2 + 4x\sqrt{b + x^2})$. Parameter $\omega^2 = 1$ and d=3, $v_{xo} = -1.5$, $x_o = 5$, $v_{yo} = -1.2$, $y_o = -2$, t=[0,400]

Fig7.A trajectory for $V = a^2|y| + b^2\sqrt{|x|}$. Parameter $E_1 = E_2 = k = 1$

Fig8.A trajectory for $V = a^2|y| + b^2|x|$. Parameter $E_1 = E_2 = k = 1$

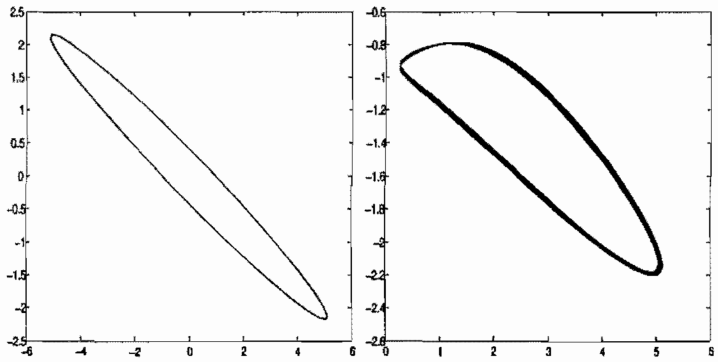

FIG. 4.1. Case 1 :$V = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$, Case 2 :$\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{y^2}$

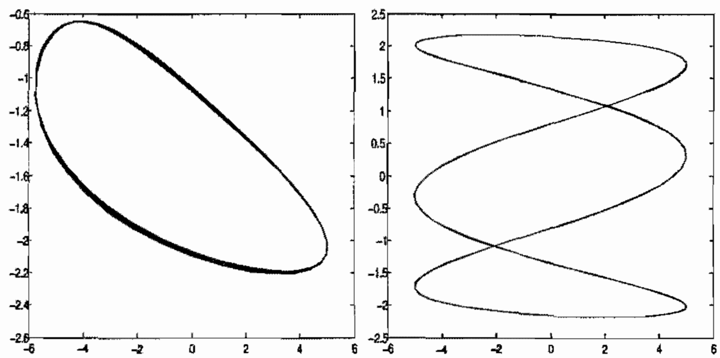

FIG. 4.2. Case 3 :$\frac{\omega^2}{2}(4x^2+y^2) + \frac{b}{y^2} + cx$, Case 4 :$\frac{\omega^2}{2}(9x^2+y^2)$

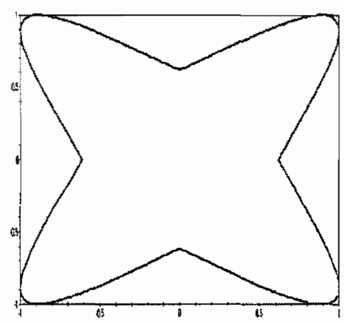

FIG. 4.3. Case 5 :$V = \beta_1^2\sqrt{|x|} + \beta_2^2\sqrt{|y|}$

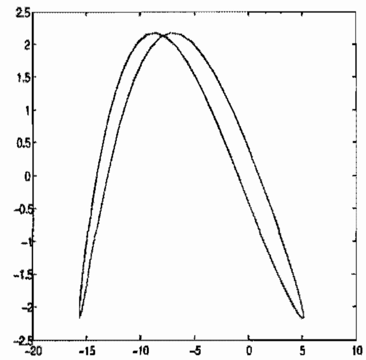

FIG. 4.4. Case 6 :$\frac{\omega^2}{18}(2b + 5x^2 + 4x\sqrt{b + x^2})$

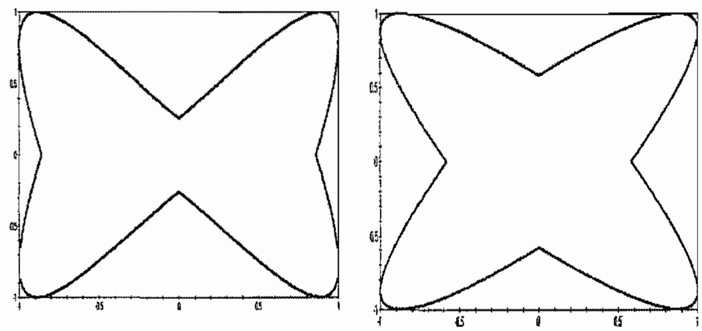

FIG. 4.5. Case 7 :$V = a^2|y| + b^2\sqrt{|x|}$ et Case 8 :$V = a^2|y| + b^2|x|$

DESCRIPTION DE L'ARTICLE 2

Le prochain chapitre de la thèse est un article dont je suis le seul auteur. Il constitue la suite logique du premier article. On y presente les résultats sur les systèmes quantiques superintégrables avec des fonctions rationnelles.

Cet article a été publié par le Journal of Mathematical Physics. Voici la référence complète :

I. Marquette, Superintegrability with third order integrals of motion, cubic algebras and supersymmetric quantum mechanics I :Rational function potentials, J.Math.Phys. 50, 012101 (2009).

Par souci d'une plus grande uniformité de la thèse, les équations sont dénotées par (5.i.j) plutôt que par (i.j).

Chapitre 5

SUPERINTEGRABILITY WITH THIRD ORDER INTEGRALS OF MOTION, CUBIC ALGEBRAS AND SUPERSYMMETRIC QUANTUM MECHANICS I :RATIONAL FUNCTION POTENTIALS

We consider a superintegrable Hamiltonian system in a two-dimensional space with a scalar potential that allows one quadratic and one cubic integral of motion. We construct the most general cubic algebra and we present specific realizations. We use them to calculate the energy spectrum. All classical and quantum superintegrable potentials separable in Cartesian coordinates with a third order integral are known. The general formalism is applied to quantum reducible and irreducible rational potentials separable in Cartesian coordinates in E2. We also discuss these potentials from the point of view of supersymmetric and PT-symmetric quantum mechanics.

5.1. Introduction

In classical mechanics a Hamiltonian system with Hamiltonian H and integrals of motion X_a

$$H = \frac{1}{2} g_{ik} p_i p_k + V(\vec{x}, \vec{p}), \quad X_a = f_a(\vec{x}, \vec{p}), \quad a = 1, ..., n-1 \quad , \qquad (5.1.1)$$

is called completely integrable (or Liouville integrable) if it allows n integrals of motion (including the Hamiltonian) that are well defined functions on phase space, are in involution $\{H, X_a\}_p = 0$, $\{X_a, X_b\}_p = 0$, a,b=1,...,n-1 and are functionally independent ($\{,\}_p$ is a Poisson bracket). A system is superintegrable if it is integrable and allows further integrals of motion $Y_b(\vec{x}, \vec{p})$, $\{H, Y_b\}_p = 0$, b=n,n+1,...,n+k that are also well defined functions on phase space and the integrals$\{H, X_1, ..., X_{n-1}, Y_n, ..., Y_{n+k}\}$ are functionally independent. A system is maximally superintegrable if the set contains 2n-1 functions, quasi-maximally superintegrable if it contains 2n-2 and minimally superintegrable if it contains n+1 such integrals. The integrals Y_b are not required to be in evolution with X_1,...X_{n-1}, nor with each other. The same definitions apply in quantum mechanics but $\{H, X_a, Y_b\}$ are well defined quantum mechanical operators, assumed to form an algebraically independent set.

Superintegrable systems appear in many domains of physics such quantum chemistry, condensed matter and nuclear physics. The most well known examples of (maximally) superintegrable systems are the Kepler-Coulomb [1,2] system $V(\vec{x}) = \frac{\alpha}{r}$ and the harmonic oscillator $V(\vec{x}) = \alpha r^2$ [3,4]. A systematic search for superintegrable systems in two-dimensional Euclidean space E_2 was started some time ago [5,6]. In 1935 J. Drach published two articles on two-dimensional Hamiltonian systems with third order integrals of motion and found 10 such integrable classical potentials in complex Euclidean space $E_2(\mathbb{C})$ [7]. A systematic study of superintegrable classical and quantum system with a third order integral is more recent [8,9]. All classical and quantum potentials with a second and a third order integral of motion that separate in Cartesian coordinates in the two-dimensional Euclidean space were found in Ref 9. There are 21 quantum potentials and 8 classical potentials.

The classical potentials were studied earlier [10]. In all 8 cases of superintegrable systems, separating in Cartesian coordinates and allowing a third order integral of motion, the integrals of motion generate a cubic Poisson algebra. In many cases this polynomial algebra is reducible, that is it is a consequence of the existence of

a simpler algebraic structure. We have also studied trajectories and have shown that bounded trajectories are always closed for these superintegrable potentials. The quantum case is much richer : 21 superintegrable cases of the considered type exist, 13 of them irreducible. In this context we call a potential, or a Hamiltonian "reducible" if the third order integral is the commutator (or Poisson commutator) of two second order integrals. The potentials are expressed in terms of rational functions in 6 cases, elliptic functions in 2 cases and Painlevé transcendents [11] P_I,P_{II} and P_{IV} in 5 cases.
The three reducible cases are

$$V = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2), \quad V = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{y^2}, \quad V = \frac{\omega^2}{2}(4x^2+y^2) + \frac{b}{y^2} + cx \ .$$

The irreducible potentials with rational function are :

Potential 1. $V = \hbar^2[\frac{x^2+y^2}{8a^4} + \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2}]$
Potential 2. $V = \frac{\omega^2}{2}(9x^2+y^2)$
Potential 3. $V = \frac{\omega^2}{2}(9x^2+y^2) + \frac{\hbar^2}{y^2}$
Potential 4. $V = \hbar^2[\frac{9x^2+y^2}{8a^4} + \frac{1}{(y-a)^2} + \frac{1}{(y+a)^2}]$
Potential 5. $V = \hbar^2(\frac{1}{8a^4}[(x^2+y^2) + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x-a)^2}]$
Potential 6. $V = \hbar^2[\frac{1}{8a^4}(x^2+y^2) + \frac{1}{(y+a)^2} + \frac{1}{(y-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x-a)^2}]$.

It is well know that in quantum mechanics the operators commuting with the Hamiltonian, form an o(4) algebra for the hydrogen atom [3,4] and a u(3) algebra for the harmonic oscillator. We can obtain from the algebra the energy spectrum. In many cases the algebra is no longer a Lie algebra and many examples of polynomial algebras were obtained in quantum mechanics [12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22]. C.Daskaloyannis studied the case of the quadratic Poisson algebras of two-dimensional classical superintegrable systems and quadratic (associative) algebras of quantum superintegrable systems [17]. He shows how the quadratic algebras provide a method to obtain the energy spectrum. He uses realizations in terms of deformed oscillator algebras [18]. Potentials with a third order integral can be investiged using these techniques.

Supersymmetry was originally introduced in the context of grand unification theory in elementary particle physics in terms of quantum field theory involving a symmetry between bosons and fermions [23]. So far there is no experimental evidence of SUSY particles. At our energies we can distinguish bosons and fermions and this symmetry should appear as a broken symmetry. Supersymmetric quantum mechanics (SUSYQM) was introduced by E.Witten [24] as a toy model to study supersymmetry breaking. This method is related to earlier investigation of spectral properties of Sturm-Liouville differential operators by G.Darboux [25] and T.F.Moutard [26] in the 19th century. SUSYQM is also related to the factorization method that was used by E.Schrodinger in the context of the quantum harmonic oscillator [27]. The factorization method was investigated more systematically later by L.Infeld and T.F.Hull [28]. SUSYQM is now an independent field with applications to atomic, nuclear, condensed matter, statistical physics and quantum mechanics [29]. The relation with exactly solvable potentials has been discussed [30,31] and also with superintegrable potentials and quadratic algebras [32].

This paper is organized in the following way. In Section 2 we give the general form of the cubic algebra for two-dimensional systems with a quadratic and a cubic operator that commute with the Hamiltonian. We give a realization of the cubic algebra in terms of parafermionic oscillator algebras. We study the finite dimensional representations of the cubic algebra. In Section 3 we apply this method to the case of irreducible potentials separable in Cartesian coordinates in E_2 with a third order integral. In Section 4 we investigate the irreducible potentials from the point of view of supersymmetric quantum mechanics. In Section 5 we give the generating spectrum algebra of the irreducible Potential 1. In Section 6 we investigate the complexification of the irreducible Potential 1. (All other cases can we obtained from Potential 1).

5.2. Cubic and parafermionic algebras

We consider a quantum superintegrable system with a quadratic Hamiltonian and one second order and one third order integral of motion

$$H = a(q_1, q_2)P_1^2 + 2b(q_1, q_2)P_1P_2 + c(q_1, q_2)P_2^2 + V(q_1, q_2) \tag{5.2.1}$$

$$A = d(q_1, q_2)P_1^2 + 2e(q_1, q_2)P_1P_2 + f(q_1, q_2)P_2^2 + g(q_1, q_2)P_1 + h(q_1, q_2)P_2 + Q(q_1, q_2)$$

$$B = u(q_1, q_2)P_1^3 + 3v(q_1, q_2)P_1^2P_2 + 3w(q_1, q_2)P_1P_2^2 + x(q_1, q_2)P_2^3 + j(q_1, q_2)P_1^2$$
$$+2k(q_1, q_2)P_1P_2 + l(q_1, q_2)P_2^2 + m(q_1, q_2)P_1 + n(q_1, q_2)P_2 + S(q_1, q_2) \quad ,$$

with

$$P_1 = -i\hbar\partial_1, P_2 = -i\hbar\partial_2 \quad , \tag{5.2.2}$$

$$[H, A] = [H, B] = 0 \quad . \tag{5.2.3}$$

We assume that our integrals close in a cubic algebra. This is the quantum version of the cubic Poisson algebra obtained earlier [10] and the cubic generalization of the quadratic algebra studied by C.Daskaloyannis [17]. The most general form of such an algebra is

$$\begin{aligned} [A, B] &= C \\ [A, C] &= \alpha A^2 + \beta\{A, B\} + \gamma A + \delta B + \epsilon \\ [B, C] &= \mu A^3 + \nu A^2 + \rho B^2 + \sigma\{A, B\} + \xi A + \eta B + \zeta \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

where $\{,\}$ denotes an anticommutator. The coefficients α , β and μ are constants, but the other ones can be polynomials in the Hamiltonian H. The degrees of these polynomials are dictated by the fact that H and A are second order polynomials in the momenta and B is a third order one. Hence C can be a fourth order polynomial. The Jacobi identity $[A, [B, C]] = [B, [A, C]]$ implies $\rho = -\beta$, $\sigma = -\alpha$ and $\eta = -\gamma$. We obtain

$$[A, B] = C \tag{5.2.5a}$$

$$[A,C] = \alpha A^2 + \beta\{A,B\} + \gamma A + \delta B + \epsilon \tag{5.2.5b}$$

$$[B,C] = \mu A^3 + \nu A^2 - \beta B^2 - \alpha\{A,B\} + \xi A - \gamma B + \zeta \quad . \tag{5.2.5c}$$

For the polynomials on the left and right sides of Eq.(5.2.4) and Eq.(5.2.5) to have the same degree we must have

$$\begin{gathered}
\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \mu = \mu_0 \\
\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 H, \quad \delta = \delta_0 + \delta_1 H, \quad \epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 H + \epsilon_2 H^2 \\
\nu = \nu_0 + \nu_1 H, \quad \xi = \xi_0 + \xi_1 H + \xi_2 H^2 \\
\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H + \zeta_2 H^2 + \zeta_3 H^3,
\end{gathered} \tag{5.2.6}$$

where α_0, ... , ζ_3 are constants.

The Casimir operator of a polynomial algebra is an operator that commutes with all elements of the algebra :

$$[K,A] = [K,B] = [K,C] = 0 \tag{5.2.7}$$

and this implies

$$\begin{gathered}
K = C^2 - \alpha\{A^2,B\} - \beta\{A,B^2\} + (\alpha\beta - \gamma)\{A,B\} + (\beta^2 - \delta)B^2 \\
(+\beta\gamma - 2\epsilon)B + \frac{\mu}{2}A^4 + \frac{2}{3}(\nu + \mu\beta)A^3 + (-\frac{1}{6}\mu\beta^2 + \frac{\beta\nu}{3} + \frac{\delta\mu}{2} + \alpha^2 + \xi)A^2 \\
+(-\frac{1}{6}\mu\beta\delta + \frac{\delta\nu}{3} + \alpha\gamma + 2\zeta)A \quad .
\end{gathered} \tag{5.2.8}$$

Ultimatly, the Casimir operator will be a function of the Hamiltonian alone. We construct a realization of the cubic algebra in terms of a deformed oscillator algebra [17,18] $\{b^t, b, N\}$ which satisfies the relation

$$[N,b^t] = b^t, \quad [N,b] = -b, \quad b^t b = \Phi(N), \quad bb^t = \Phi(N+1) \quad . \tag{5.2.9}$$

$\Phi(N)$ is called the "structure function". Following C.Daskaloyannis [17] we request $\Phi(N)$ to be a real function and impose $\Phi(0) = 0$ and $\Phi(N) > 0$ for $N > 0$.

We construct a Fock type representation for the deformed oscillator algebra with a Fock basis $|n>$, n=0,1,2... satisfying

$$N|n>=n|n>, \quad b^t|n>=\sqrt{\Phi(N+1)}|n+1>, \tag{5.2.10}$$

$$b|0>=0, \quad b|n>=\sqrt{\Phi(N)}|n-1> \quad . \tag{5.2.11}$$

To obtain a finite-dimensional representation we request $\Phi(p+1)=0$.

Let us show that there exists a realization of the form :

$$A=A(N), \quad B=b(N)+b^t\rho(N)+\rho(N)b \quad . \tag{5.2.12}$$

The functions A(N) , b(N) et $\rho(N)$ will be determined by the cubic algebra. We have by Eq.(5.2.5.a)

$$C=[A,B]=b^t\bigtriangleup A(N)\rho(N)-\rho(N)\bigtriangleup A(N)b, \tag{5.2.13}$$

where $\triangle A(N)$ is define to be $\triangle A(N) = A(N+1) - A(N)$. When we insert Eq.(5.2.12) into Eq.(5.2.5b) we obtain two equations that allow us to determine A(N) and b(N)

$$\triangle A(N)^2=\gamma(A(N+1)+A(N))+\epsilon \tag{5.2.14}$$

$$\alpha A(N)^2+2\beta A(N)b(N)+\gamma A(N)+\delta b(N)+\epsilon=0 \quad .$$

Two distinct possibilities occur.

Case 1 : $\beta \neq 0$. We find the following solution

$$A(N)=\frac{\beta}{2}((N+u)^2-\frac{1}{4}-\frac{\delta}{\beta^2}) \tag{5.2.15}$$

$$b(N)=\frac{\alpha}{4}((N+u)^2-\frac{1}{4})+\frac{\alpha\delta-\gamma\beta}{2\beta^2}-\frac{\alpha\delta^2-2\gamma\delta\beta+4\beta^2\epsilon}{4\beta^4}\frac{1}{(N+u)^2-\frac{1}{4}} \quad .$$

The constant u will be determined below using the fact that we require that the deformed oscillator algebras should be nilpotent. Eq.(5.2.5c) gives us

$$
\begin{aligned}
&2\Phi(N+1)(\triangle A(N)+\frac{\gamma}{2})\rho(N)-2\Phi(N)(\triangle A(N-1)-\frac{\gamma}{2})\rho(N-1) \qquad (5.2.16)\\
&\quad=\mu A(N)^3+\nu A(N)^2-\beta b(N)^2-2\alpha A(N)b(N)+\xi A(N)-\gamma b(N)+\zeta
\end{aligned}
$$

and the Casimir operator is now realized as

$$
\begin{aligned}
K&=\Phi(N+1)(\beta^2-\delta-2\beta A(N)-\triangle A(N)^2)\rho(N) \qquad (5.2.17)\\
&+\Phi(N)(\beta^2-\delta-2\beta A(N)-\triangle A(N-1)^2)\rho(N-1)-2\alpha A(N)^2 b(N)\\
&+(\beta^2-\delta-2\beta A(N))b(N)^2+2(\alpha\beta-\gamma)A(N)b(N)+(\beta\gamma-2\epsilon)b(N)+\frac{\mu}{2}A(N)^4\\
&+\frac{2}{3}(\nu+\mu\beta)A(N)^3+(-\frac{1}{6}\mu\beta^2+\frac{\beta\nu}{3}+\frac{\delta\mu}{2}+\alpha^2+\epsilon)A(N)^2+(-\frac{1}{6}\mu\beta\delta+\frac{\delta a}{3}+\alpha\gamma+2\zeta)A(N) \quad .
\end{aligned}
$$

Finally the structure function is

$$
\begin{aligned}
\Phi(N)&=\frac{1}{\rho(N-1)(\triangle A(N-1)-\frac{\beta}{2})(f)+(\triangle A(N)+\frac{\beta}{2})(g})\\
&[(\triangle A(N)+\frac{\beta}{2})(K+2\alpha A(N)^2 b(N)-(\beta^2-\delta-2\beta A(N))b(N)^2\\
&-2(\alpha\beta-\gamma)A(N)b(N)-(\beta\gamma-2\epsilon)b(N)-\frac{\mu}{2}A(N)^4-\frac{2}{3}(\nu+\mu\beta)A(N)^3 \qquad (5.2.18)\\
&-(-\frac{1}{6}\mu\beta^2+\frac{\beta\nu}{3}+\alpha^2+\xi)A(N)^2-(-\frac{1}{6}\mu\beta\delta+\frac{\delta\nu}{3}+\alpha\gamma+2\zeta)A(N))\\
&-\frac{1}{2}(\beta^2-\delta-2\beta A(N)-\triangle A(N)^2)(\mu A(N)^3+\nu A(N)^2-\beta b(N)^2-2\alpha A(N)b(N)+\xi A(N)-\gamma b(N)+
\end{aligned}
$$

with

$$
f=\beta^2-\delta-2\beta A(N)-\triangle A(N)^2,\quad g=\beta^2-\delta-2\beta A(N)-\triangle A(N-1)^2 \quad . \qquad (5.2.19)
$$

Thus the structure function depends only on the function ρ. This function can be arbitrarily chosen and does not influence the spectrum. We choose ρ to obtain a structure function that is a polynomial in N, namely we put

$$\rho(N) = \frac{1}{3 * 2^{12}\beta^8(N+u)(1+N+u)(1+2(N+u))^2}. \tag{5.2.20}$$

From our expressions for A(N) , b(N) and $\rho(N)$, the third relation of the cubic associative algebra and the expression of the Casimir operator we find the structure function $\Phi(N)$. For the Case 1 the structure function is a polynomial of order 10 in N. The coefficients of this polynomial are functions of α, β, μ, γ, δ, ϵ, ν, ξ and ζ. We give the formula in the Appendix.

Case 2 : For $\beta = 0$ and $\delta \neq 0$ we get the solution

$$A(N) = \sqrt{\delta}(N+u), b(N) = -\alpha(N+u)^2 - \frac{\gamma}{\sqrt{\delta}}(N+u) - \frac{\epsilon}{\delta} \quad . \tag{5.2.21}$$

We choose a trivial expression $\rho(N) = 1$. The explicit expression of the structure function for this case is

$$\begin{aligned}\Phi(N) = (\frac{K}{-4\delta} - \frac{\gamma\epsilon}{4\delta^{\frac{3}{2}}} - \frac{\zeta}{4\sqrt{\delta}} + \frac{\epsilon^2}{4\delta^2})\\ +(\frac{-\alpha\epsilon}{2\delta} - \frac{\xi}{4} - \frac{\gamma^2}{4\delta} + \frac{\gamma\epsilon}{2\delta^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha\gamma}{4\sqrt{\delta}} + \frac{\zeta}{2\sqrt{\delta}} + \frac{\nu\sqrt{\delta}}{12})(N+u)\\ +(\frac{-\nu\sqrt{\delta}}{4} - \frac{3\alpha\gamma}{4\sqrt{\delta}} + \frac{\gamma^2}{4\delta} + \frac{\epsilon\alpha}{2\delta} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\xi}{4} + \frac{\mu\delta}{8})(N+u)^2\\ +(\frac{-\alpha^2}{2} + \frac{\gamma\alpha}{2\delta^{\frac{1}{2}}} + \frac{\nu\sqrt{\delta}}{6} - \frac{\mu\delta}{4})(N+u)^3 + (\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\mu\delta}{8})(N+u)^4 \quad .\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

We use a parafermionic realization in which the parafermionic number operator N and the Casimir operator K are diagonal. The basis of this representation is the Fock basis for the parafermionic oscillator. The vector $|k,n>, n = 0,1,2...$ satisfies the following relations :

$$N|k,n>= n|k,n>, K|k,n>= k|k,n> \quad . \tag{5.2.23}$$

The vectors $|k,n>$ are also eigenvectors of the generator A.

$$A|k,n>= A(k,n)|k,n>,$$

$$A(k,n) = \frac{\beta}{2}((n+u)^2 - \frac{1}{4} - \frac{\delta}{\beta^2}), \quad \beta \neq 0, \tag{5.2.24}$$
$$A(k,n) = \sqrt{\delta}(n+u), \quad \beta = 0, \quad \delta \neq 0 \quad .$$

We have the following constraints for the structure function

$$\Phi(0,u,k) = 0, \quad \Phi(p+1,u,k) = 0 \quad . \tag{5.2.25}$$

With these two relations we can find the energy spectrum. Many solutions for the system exist. Unitary representations of the deformed parafermionic oscillator obey the constraint $\Phi(x) > 0$ for x=1,2,...,p .

There are other conditions that should be imposed. The representations should be constrained by the differential character of the Hamiltonian and the integrals. For example the mean energy should be greater than the minimum of the potential

$$< H > \geq minV \tag{5.2.26}$$

This restriction and possibly other ones coming from the differential operator character of the integrals should be taken into consideration to exclude spurious states.

5.3. Irreducible rational function potentials

In the case of the three reducible superintegrable potentials the cubic algebra is a direct consequence of a simpler algebraic structure. The first potential $V = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$ is the well known isotropic harmonic oscillator. We can construct the quadratic or the cubic algebra from the Lie algebra as in the classical case [10]. The eigenfunctions of the harmonic oscillator are well known and are given in terms of the Hermite polynomials. The two other reducible potentials $V = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{y^2}$ and $V = \frac{\omega^2}{2}(4x^2+y^2)+\frac{b}{y^2}+cx$ are two of the four types of potentials found a long time ago [6]. There is no Lie algebra in these cases but a quadratic algebra [17] and we can obtain the cubic algebra directly from this algebra. We obtain from the cubic algebra the same unitary representations that were obtained from the quadratic algebra [17].

In this section we will apply to the irreducible quantum potentials resuts of the Section 2 and give all unitary representations and the corresponding energy spectra. Notice that in all case we have $\beta = 0$ so only Case 2 of Section 2 occurs.

Potential 1 : $V = \hbar^2(\frac{x^2+y^2}{8a^4} + \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2})$

This potential has the following two integrals

$$A = P_x^2 - P_y^2 + 2\hbar^2(\frac{x^2-y^2}{8a^4} + \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2}) \tag{5.3.1}$$

$$B = \frac{1}{2}\{L, P_x^2\} + \frac{1}{2}\hbar^2\{y(\frac{4a^2-x^2}{4a^4} - \frac{6(x^2+a^2)}{(x^2-a^2)^2)}), P_x\} \tag{5.3.2}$$

$$+\frac{1}{2}\hbar^2\{x(\frac{(x^2-4a^2)}{4a^4} - \frac{2}{x^2-a^2} + \frac{4(x^2+a^2)}{(x^2-a^2)^2}), P_y\}.$$

The integrals A,B and H give rise to the following cubic algebra and Casimir operator

$$[A, B] = C, \quad [A, C] = \frac{4\hbar^4}{a^4}B \tag{5.3.3}$$

$$[B, C] = -2\hbar^2A^3 - 6\hbar^2A^2H + 8\hbar^2H^3 + 6\frac{\hbar^4}{a^2}A^2 + 8\frac{\hbar^4}{a^2}HA - 8\frac{\hbar^4}{a^2}H^2 + 2\frac{\hbar^6}{a^4}A - 2\frac{\hbar^6}{a^4}H - 6\frac{\hbar^8}{a^6}$$

$$K = -16\hbar^2H^4 + 32\frac{\hbar^4}{a^2}H^3 + 16\frac{\hbar^6}{a^4}H^2 - 40\frac{\hbar^8}{a^6}H - 3\frac{\hbar^{10}}{a^8} \quad . \tag{5.3.4}$$

The structure function is given by the expression

$$\Phi(x) = (\frac{-\hbar^8}{a^4})(x+u-(\frac{-a^2E}{\hbar^2}-\frac{1}{2}))(x+u-(\frac{a^2E}{\hbar^2}+\frac{1}{2}))(x+u-(\frac{-a^2E}{\hbar^2}+\frac{3}{2}))(x+u-(\frac{-a^2E}{\hbar^2}+\frac{5}{2})) \tag{5.3.5}$$

There are three unitary representations. The first unitary solution is for $a = ia_0$, $a_0 \in \mathbb{R}$. From the condition $\Phi(0, u, k) = 0$ we find $u = \frac{-a_0^2E}{\hbar^2} + \frac{1}{2}$. The second constraint $\Phi(p+1,u,k)=0$ implies

$$E=\frac{\hbar^2(p+2)}{2a_0^2},\quad \Phi(x)=(\frac{\hbar^8}{a_0^4})x(p+1-x)(p+3-x)(p+4-x), \tag{5.3.6}$$

where $p \in \mathbb{N}$. We have $\Phi(p+1)=0$ which means that the unitary representations have dimension p+1. This is also the degeneracy of the energy levels.
The second unitary solution for $a=ia_0, a_0 \in \mathbb{R}$. We have $u=\frac{a_0^2E}{\hbar^2}-\frac{1}{2}$ and

$$E=-\frac{\hbar^2(p)}{2a_0^2},\quad \Phi(x)=(\frac{\hbar^8}{a_0^4})x(p+1-x)(3-x)(2-x)\quad , \tag{5.3.7}$$

valid only for p=0,1.
We have

$$E \geq minV = V(0,0) = \frac{-2\hbar^2}{a_0^2}\quad , \tag{5.3.8}$$

so this is a physically meaningful solution. A third unitary solution exists this time for $a \in \mathbb{R}$. We have $u=\frac{-a^2E}{\hbar^2}+\frac{5}{2}$ and

$$E=\frac{\hbar^2(p+3)}{2a^2},\quad \Phi(x)=(\frac{\hbar^8}{a^4})x(p+1-x)(x+1)(x+3)\quad . \tag{5.3.9}$$

Potential 2 : $V=\frac{\omega^2}{2}(9x^2+y^2)$

This potential has the two integrals

$$A=P_x^2-P_y^2+\omega^2(9x^2-y^2) \tag{5.3.10}$$

$$B=\frac{1}{2}\{L,P_y^2\}+\frac{\omega^2}{6}\{y^3,P_x\}-\frac{3\omega^2}{2}\{xy^2,P_y\}\quad .$$

The cubic algebra and Casimir operator of this system are

$$[A,B]=C,\quad [A,C]=144\omega^2\hbar^2 B \tag{5.3.11}$$

$$[B,C]=-2\hbar^2A^3+6\hbar^2HA^2-8\hbar^2H^3-56\omega^2\hbar^4A+72\omega^2\hbar^4H$$

$$K=-16\hbar^2H^4+64\omega^2\hbar^4H^2+720\omega^4\hbar^6\quad . \tag{5.3.12}$$

The structure function is

$$\Phi(x) = (-36\omega^2 h^4)(x+u-(\frac{-E}{6\omega\hbar}+\frac{1}{2}))(x+u-(\frac{E}{6\omega\hbar}+\frac{1}{6}))(x+u-(\frac{E}{6\omega\hbar}+\frac{1}{2}))$$
$$(x+u-(\frac{E}{6\omega\hbar}+\frac{5}{6})) \quad . \tag{5.3.13}$$

We use the two constraints given by the Eq.(5.2.25). We obtain $u = \frac{-E}{6\omega\hbar} + \frac{1}{2}$ and three unitary representations with the corresponding energy spectra

$$E = 3\omega\hbar(p+\frac{2}{3}), \quad \Phi(x) = (36\omega^2 h^4)x(p+1-x)(p+\frac{2}{3}-x)(p+\frac{1}{3}-x) \tag{5.3.14}$$
$$E = 3\omega\hbar(p+1), \quad \Phi(x) = (36\omega^2 h^4)x(p+1-x)(p+\frac{2}{3}-x)(p+\frac{4}{3}-x) \tag{5.3.15}$$
$$E = 3\omega\hbar(p+\frac{4}{3}), \quad \Phi(x) = (36\omega^2 h^4)x(p+1-x)(p+\frac{5}{3}-x)(p+\frac{4}{3}-x). \tag{5.3.16}$$

These results coincide with those obtained by solving the Schrödinger equation using separation of variable. The eigenfunctions are well known and given by

$$\phi_{k_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{k_1}k_1!}}(\frac{3\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-3\omega}{2\hbar}x^2} H_{k_1}(\sqrt{\frac{3\omega}{\hbar}}x), \tag{5.3.17}$$

$$\phi_{k_2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2^{k_2}k_2!}}(\frac{\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-\omega}{2\hbar}y^2} H_{k_2}(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}y) \quad , \tag{5.3.18}$$

where H_k are Hermite polynomials. The corresponding energy spectrum is

$$E = \omega\hbar(3k_1 + k_2 + 2) \tag{5.3.19}$$

Potential 3 : $V = \frac{\omega^2}{2}(9x^2+y^2) + \frac{\hbar^2}{y^2}$

The two integrals of this potential are

$$A = P_x^2 - P_y^2 + \omega^2(9x^2 - y^2) - \frac{2\hbar^2}{y^2} \tag{5.3.20}$$
$$B = \frac{1}{2}\{L, P_y^2\} + \frac{1}{2}\{\frac{\omega^2 y^3}{3} - \frac{\hbar^2}{y}, P_x\} + \frac{1}{2}\{3x(-\omega^2 y^2 + \frac{\hbar^2}{y^2}, P_y\}.$$

The cubic algebra and the Casimir operator are

$$[A,B]=C \quad [A,C]=144\omega^2\hbar^2 B \tag{5.3.21}$$

$$[B,C]=-2\hbar^2A^3+6\hbar^2HA^2-8\hbar^2H^3-8\omega^2\hbar^4A+72\omega^2\hbar^4H$$

$$K=-16\hbar^2H^4+256\omega^2\hbar^4H^2-1008\omega^4\hbar^6 \quad . \tag{5.3.22}$$

The structure function is

$$\begin{aligned}\Phi(x)=(-36\omega^2\hbar^4)(x+u-(\frac{-E}{6\omega\hbar}+\frac{1}{2}))(x+u-(\frac{E}{6\omega\hbar}-\frac{1}{6}))(x+u-(\frac{E}{6\omega\hbar}+\frac{1}{2}))\\(x+u-(\frac{E}{6\omega\hbar}+\frac{7}{6})) \quad .\end{aligned} \tag{5.3.23}$$

Using Eq.(5.2.25) we obtain $u=\frac{-E}{6\omega\hbar}+\frac{1}{2}$ and two unitary representations

$$\Phi(x)=(36\omega^2\hbar^4)x(p+\frac{5}{3}-x)(p+1-x)(p+\frac{7}{3}-x), \quad E=3\omega\hbar(p+\frac{5}{3}), \tag{5.3.24}$$

$$\Phi(x)=(36\omega^2\hbar^4)x(p+\frac{1}{3}-x)(p+\frac{5}{3}-x)(p+1-x), \quad E=3\omega\hbar(p+1) \quad . \tag{5.3.25}$$

These results are corroborated by those obtained when we use separation of variable and solve the Schrödinger equation. The eigenfunctions are well know are given by

$$\phi_{k_1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2^{k_1}k_1!}}(\frac{3\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}}e^{\frac{-3\omega}{2\hbar}x^2}H_{k_1}(\sqrt{\frac{3\omega}{\hbar}}x), \tag{5.3.26}$$

$$\phi_{k_2}(y)=(\frac{\omega}{\hbar})(\frac{k_2!((\frac{\omega}{\hbar})^{\frac{3}{2}})}{\Gamma(k_2+\frac{5}{2})})^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\omega}{2\hbar}y^2}y^2L_{k_2}^{\frac{3}{2}}(\frac{\omega}{\hbar}y^2). \tag{5.3.27}$$

where L_n^α is a Laguerre polynomial. The corresponding energy spectrum is

$$E=\omega\hbar(3k_1+2k_2+4) \tag{5.3.28}$$

Potential 4 : $V=\hbar^2(\frac{9x^2+y^2}{8a^4}+\frac{1}{(y-a)^2}+\frac{1}{(y+a)^2})$

The two integrals are given by the formulas

$$A = P_x^2 - P_y^2 + 2\hbar^2 (\frac{9x^2 - y^2}{8a^4} + \frac{1}{(y-a)^2} + \frac{1}{(y+a)^2}) \tag{5.3.29}$$

$$B = \frac{1}{2}\{L, P_y^2\} + \frac{1}{2}\hbar^2 \{y(\frac{y^2}{12a^4} - \frac{8a^2}{(y^2-a^2)^2} - \frac{2}{y^2-a^2}), P_y\} \tag{5.3.30}$$
$$+\frac{1}{2}\hbar^2 \{x(\frac{8(y^2+a^2)}{(y^2-a^2)^2} - \frac{y^2}{a^4}), P_y\}$$

The cubic algebra and the Casimir operator are

$$[A, B] = C, \quad [A, C] = \frac{36\hbar^4}{a^4} B \tag{5.3.31}$$

$$[B, C] = -2\hbar^2 A^3 - 6\hbar^2 A^2 H - 8\hbar^2 H^3 + 10\frac{\hbar^6}{a^4} A + 18\frac{\hbar^6}{a^4} H - 24\frac{\hbar^8}{a^6}$$

$$K = -16\hbar^2 H^4 + 112\frac{\hbar^6}{a^4} H^2 + 96\frac{\hbar^8}{a^6} H - 171\frac{\hbar^{10}}{a^8} \quad . \tag{5.3.32}$$

The structure function is

$$\Phi(x) = \frac{-9\hbar^6}{a^4}(x+u-(\frac{a^2 E}{3\hbar^2} - \frac{1}{2}))(x+u-(\frac{-a^2 E}{3\hbar^2} + \frac{1}{2}))(x+u-(\frac{a^2 E}{3\hbar^2} + \frac{5}{6}))(x+u-(\frac{a^2 E}{3\hbar^2} + \frac{7}{6})) \quad . \tag{5.3.33}$$

For the case $a = ia_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}$ we get the three following unitary representations

$$\Phi(x) = \frac{9\hbar^6}{a_0^4} x(p+1-x)(x - \frac{4}{3})(x - \frac{5}{3}), \quad E = \frac{3\hbar^2 (p)}{2a_0^2} \tag{5.3.34}$$

$$\Phi(x) = \frac{36\hbar^6}{a_0^4} x(p+1-x)(x + \frac{4}{3})(x - \frac{1}{3}), \quad E = \frac{3\hbar^2 (p + \frac{4}{3})}{2a_0^2} \tag{5.3.35}$$

$$\Phi(x) = \frac{36\hbar^6}{a_0^4} x(p+1-x)(x + \frac{2}{3})(x + \frac{1}{3}), \quad E = \frac{3\hbar^2 (p + \frac{5}{3})}{2a_0^2} \quad . \tag{5.3.36}$$

For the case $a \in \mathbb{R}$ we get the three unitary representations

$$\Phi(x) = \frac{9\hbar^6}{a^4} x(p+1-x)(p + \frac{7}{3} - x)(p + \frac{8}{3} - x), \quad E = \frac{3\hbar^2 (p+2)}{2a^2} \tag{5.3.37}$$

$$\Phi(x) = \frac{9\hbar^6}{a^4}x(p+1-x)(p+\frac{4}{3}-x)(p-\frac{1}{3}-x), \quad E = \frac{3\hbar^2(p+\frac{2}{3})}{2a^2} \tag{5.3.38}$$

$$\Phi(x) = \frac{9\hbar^6}{a^4}x(p+1-x)(p+\frac{2}{3}-x)(p-\frac{2}{3}-x), \quad E = \frac{3\hbar^2(p+\frac{1}{3})}{2a^2} \quad . \tag{5.3.39}$$

The Potential 5 $V = \hbar^2(\frac{1}{8a^4}[(x^2+y^2)+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+a)^2}+\frac{1}{(x-a)^2}]$ and Potential 6 $V = \hbar^2[\frac{1}{8a^4}(x^2+y^2)+\frac{1}{(y+a)^2}+\frac{1}{(y-a)^2}+\frac{1}{(x+a)^2}+\frac{1}{(x-a)^2}]$ are particular. Their integrals of motion A,B and C do not close in a finite cubic algebra. Closure at a higher order remains to be investigated. In these cases, we have the separation of variables and the unidimensional parts are related to the Potential 1 and Potential 4 and their spectra. We will see also in the next section that we can obtain information using supersymmetric quantum mechanics.

5.4. Supersymmetric quantum mechanics

In this section we will investigate a relation between SUSYQM [24] and superintegrable systems with a third order integral of motion . Let us recall some aspects of supersymmetric quantum mechanics. We define two first order operators

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx} + W(x), \quad A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx} + W(x) \quad . \tag{5.4.1}$$

We consider the following two Hamiltonians which are called "superpartners"

$$H_1 = A^\dagger A = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + W^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2}}W', \quad H_2 = AA^\dagger = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + W^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2}}W'. \tag{5.4.2}$$

There are two cases. The first is $A\psi_0^{(1)} \neq 0$, $E_0^{(1)} \neq 0$, $A^\dagger\psi_0^{(2)} \neq 0$ and $E_0^{(2)} \neq 0$. We have

$$E_n^{(2)} = E_n^{(1)} > 0, \quad \psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(1)}}}A\psi_n^{(1)}, \quad \psi_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}}A^\dagger\psi_n^{(2)} \quad . \tag{5.4.3}$$

and the two Hamiltonians are isospectral. This case corresponds to broken supersymmetry.

For the second case the supersymmetry is unbroken and we have $A\psi_0^{(1)} = 0$, $E_0^{(1)} = 0$, $A^\dagger\psi_0^{(2)} \neq 0$ and $E_0^{(2)} \neq 0$. Without lost of generality we take H_1 as the potential having the zero energy ground state. We have

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad E_0^{(1)} = 0, \quad \psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} A\psi_{n+1}^{(1)}, \quad \psi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} A^\dagger\psi_n^{(2)} \quad . \tag{5.4.4}$$

We can define the matrices

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{5.4.5}$$

We get the relations

$$[H, Q] = [H, Q^\dagger] = 0, \quad \{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0, \quad \{Q, Q^\dagger\} = H \quad . \tag{5.4.6}$$

We have a sl(1|1) superalgebra and H_1 and H_2 are superpartners. By construction, all our potentials can be viewed as the sum of two one dimensional potentials $H = H_x + H_y$. The unidimensional parts of the three reducible potentials and the irreducible Potential 2 and Potential 3 are known in SUSYQM. These potentials have the shape invariance property [29,31]. We will show that Potentials 1,4,5 and 6 can be also discussed from the point of view of supersymmetry.

5.4.1. Potential 1

The Hamiltonian is

$$H = H_x + H_y = \frac{P_x^2}{2} + \frac{P_y^2}{2} + \hbar^2\left(\frac{x^2 + y^2}{8a^4} + \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2}\right) \quad . \tag{5.4.7}$$

Let us define the two operators

$$b^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hbar\frac{d}{dx} - \frac{\hbar}{2a^2}x - \hbar(\frac{-1}{x-a} + \frac{-1}{x+a})) \tag{5.4.8}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hbar\frac{d}{dx} - \frac{\hbar}{2a^2}x - \hbar(\frac{-1}{x-a} + \frac{-1}{x+a})) \quad . \tag{5.4.9}$$

For $a = ia_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}$ we have

$$H_1 = b^{\dagger}b = \frac{P_x^2}{2} + \frac{\hbar^2 x^2}{8a_0^4} + \frac{\hbar^2}{(x-ia_0)^2} + \frac{\hbar^2}{(x+ia_0)^2} + \frac{3\hbar^2}{4a_0^2} \tag{5.4.10}$$

$$H_2 = bb^{\dagger} = \frac{P_x^2}{2} + \frac{\hbar^2 x^2}{8a_0^4} + \frac{5\hbar^2}{4a_0^2} \quad . \tag{5.4.11}$$

These two unidimensional Hamiltonians are almost isospectral. H_1 has a zero energy ground state. The supersymmetry is unbroken. This potential was discussed in Ref. 33. Non singular superpartners of the harmonic oscillator were discussed in Ref. 34 and 35. Coherent states of superpartners of the harmonic oscillator have also been studied [36]. Wee see that $H_1 = H_x + \frac{3\hbar^2}{4a_0^2}$ is the Hamiltonian that we are interested in and its superpartner H_2 corresponds to a harmonic oscillator.

We apply results for the unbroken supersymmetry. The zero energy ground state satisfies $b\phi_0 = 0$ and is

$$\phi_0(x) = a_0^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{4}}\frac{e^{\frac{-x^2}{4a_0^2}}}{a_0^2 + x^2} \quad . \tag{5.4.12}$$

The other eigenfunctions of H_1 are obtained by the equation $\phi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}}b^{\dagger}\phi_n^{(2)}$. In this case $\psi_n^{(2)}$ are only the eigenfunctions of the harmonic oscillator (H_2) that are written in terms of Hermite polynomials. We get directly for H_1

$$\phi_{k_1+1}(x) = b^{\dagger}(\frac{1}{\sqrt{2^{k_1}k_1!}}(\frac{1}{2a_0^2\pi})^{\frac{1}{4}}e^{\frac{-1}{4a_0^2}x^2}H_{k_1}(\sqrt{\frac{1}{2a_0^2}}x)) \tag{5.4.13}$$

$$= \frac{a_0}{\sqrt{(k_1+3)}}(\frac{1}{2a_0^2\pi})^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^{k_1}k_1!}}e^{-\frac{x^2}{4a_0^2}}(\frac{(x^3+3xa_0^2)}{a_0^2(x^2+a_0^2)}H_{k_1} - \frac{2k_1}{\sqrt{2}a_0}\lambda H_{k_1-1}),$$

λ=1 for $k_1 \geq 1$, λ=0 for k_1=0. With this expression we get for $k_1 = 0$

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}(2\pi)^{\frac{1}{4}} a_0^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a_0^2}} \frac{x(3a_0^2 + x^2)}{a_0^2 + x^2} \quad . \tag{5.4.14}$$

We have the following energy spectrum for H_1

$$E_0^{(1)} = 0, \quad E_{k_1+1}^{(1)} = \frac{\hbar^2}{2a_0^2}(k_1 + 3) \quad . \tag{5.4.15}$$

We thus obtain the spectrum of H_x (the x part of the irreducible Potential 1) :

$$E_0^x = -\frac{3\hbar^2}{4a_0^2}, \quad E_{k_1+1}^x = \frac{\hbar^2}{2a_0^2}(k_1 + \frac{3}{2}) \quad . \tag{5.4.16}$$

If we add H_y to these results we get the energy spectrum and the eigenfunctions of the Potential 1. There are two families of solutions. The first corresponds to the energies

$$E = \frac{(k_1 + k_2 + 2)\hbar^2}{2a_0^2} = \frac{(p+2)\hbar^2}{2a_0^2} \tag{5.4.17}$$

with eigenfunctions

$$\phi_{k_1+1}(x) = \frac{a_0}{\sqrt{(k_1+3)}}(\frac{1}{2a_0^2\pi})^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^{k_1}k_1!}} e^{-\frac{x^2}{4a_0^2}} (\frac{(x^3 + 3xa_0^2)}{a_0^2(x^2 + a_0^2)} H_{k_1} - \frac{2k_1}{\sqrt{2}a_0} \lambda H_{k_1-1}) \tag{5.4.18}$$

$$\chi_{k_2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2^{k_2}k_2!}}(\frac{1}{2a_0^2\pi})^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-1}{4a_0^2}y^2} H_{k_2}(\sqrt{\frac{1}{2a_0^2}}y) \tag{5.4.19}$$

and is also obtained from the cubic algebra. The second corresponds to the energies

$$E = \frac{\hbar^2(k_2 - 1)}{2a_0^2} \tag{5.4.20}$$

with the corresponding eigenfunctions

$$\psi(x,y) = \phi_0(x)\chi_{k_2}(y), \quad \phi_0(x) = a_0^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{4}} \frac{e^{\frac{-x^2}{4a_0^2}}}{a_0^2 + x^2} \tag{5.4.21}$$

and $\chi_{k_2}(y)$ as in Eq.(5.4.19).

The two states obtained from Eq.(5.3.8) are given by Eq.(5.4.20) for k_2=0,1. For $k_3 \geq 3$ there are common eigenvalues given by Eq.(5.4.17) and Eq.(5.4.20) and therefore the degeneracy is p+2.

Let us consider the case $a \in \mathbb{R}$. We have the following Hamiltonians

$$H_1 = b^t b = \frac{P_x^2}{2} + \frac{\hbar^2 x^2}{8a^4} + \frac{\hbar^2}{(x-a)^2} + \frac{\hbar^2}{(x+a)^2} - \frac{3\hbar^2}{4a^2} \tag{5.4.22}$$

$$H_2 = bb^t = \frac{P_x^2}{2} + \frac{\hbar^2 x^2}{8a^4} - \frac{5\hbar^2}{4a^2} \quad . \tag{5.4.23}$$

This case is more complicated because of the singularities on the x-axis for the Hamiltonian H_1. We have a regular Hamiltonian connected to a singular one and we have also for H_2 negative energy states. Such situations have attracted a lot of attention and many articles were devoted to such singular potentials. An important case is the one of Jevicki and Rodrigues [37,38]. The corresponding Hamiltonians are

$$H_- = \frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 3, \quad H_+ = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{2}{x^2} - 1. \tag{5.4.24}$$

Factorization of Hamiltonians H_1 and H_2 given by Eq.(5.4.22) and (5.4.23) give us an algebraic relation that does not take into account the presence of singularities or boundary conditions. The wavefunctions given in Eq.(5.4.3) and (5.4.4) do not necessarily belong to the Hilbert space of square integrable functions. The potential in Eq.(5.4.22) has impenetrable barriers coming from the singularities. We can consider the superpartner to be the harmonic oscillator with two infinite barriers (at $x = \pm a$) to recover the supersymmetry [39]. In the Ref. 39 a superpartner of the harmonic oscillator with one singularity was considered but the method can be extended to more singularities. The only case that was solved analytically and where the energy levels are equidistant is when the singularity was at the origin. In our case we were not able to solve analytically and we leave for future investigations these numerical calculations that appear interesting from a phenomenological point of view. Singular potentials were also investigated by A.Das and S.A.Pernice [40] by means of the regularization method. M.Znojil [41] has discussed another method that consist in the complexification of the potential. In Section 6 we will discuss the complexification of the irreducible quantum superintegrable Potential 1.

5.4.2. Potential 4

We apply these results to the next irreducible potential

$$V = \hbar^2\left(\frac{9x^2+y^2}{8a^4} + \frac{1}{(y-a)^2} + \frac{1}{(y+a)^2}\right) \tag{5.4.25}$$

We can also use SUSYQM because the y part is the same as the x part of Potential 1. For the case $a = ia_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}$ we find with energy

$$E = \frac{\hbar^2}{2a_0^2}(3k_1 + k_2 + 3) \tag{5.4.26}$$

with the corresponding eigenfunctions

$$\chi_{k_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{k_1}k_1!}}\left(\frac{3}{2a_0^2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{3}{4a_0^2}x^2} H_{k_1}\left(\sqrt{\frac{3}{2a_0^2}}x\right) \tag{5.4.27}$$

$$\phi_{k_2+1}(y) = \frac{a_0}{\sqrt{(k_2+3)}}\left(\frac{1}{2a_0^2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^{k_2}k_2!}} e^{-\frac{y^2}{4a_0^2}} \left(\frac{(y^3+3ya_0^2)}{a_0^2(y^2+a_0^2)} H_{k_2} - \frac{2k_2}{\sqrt{2}a_0}\lambda H_{k_2-1}\right) \tag{5.4.28}$$

and we get from the singlet state the energies

$$E = \frac{\hbar^2}{2a_0^2}(3k_1) \tag{5.4.29}$$

and eigenfunctions

$$\psi(x,y) = \phi_0(y)\chi_{k_1}(x), \quad \phi_0(y) = a_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{e^{\frac{-y^2}{4a_0^2}}}{a_0^2+y^2} \tag{5.4.30}$$

and $\chi_{k_1}(x)$ as in Eq.(5.4.27).

5.4.3. Potential 5

The potential is

$$V = \hbar^2[\frac{1}{8a^4}[(x^2+y^2) + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x-a)^2}] \qquad (5.4.31)$$

For the case $a = ia_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}$ we have

$$E = \frac{(k_1 + 2k_2 + 5)}{2a_0^2}\hbar^2 \qquad (5.4.32)$$

with the eigenfunctions given by

$$\phi_{k_1}(x) = \frac{a_0}{\sqrt{(k_1+3)}}(\frac{1}{2a_0^2\pi})^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^{k_1}k_1!}}e^{-\frac{x^2}{4a_0^2}}(\frac{(x^3+3xa_0^2)}{a_0^2(x^2+a_0^2)}H_{k_1} - \frac{2k_1}{\sqrt{2}a_0}\lambda H_{k_1-1}) \qquad (5.4.33)$$

$$\chi_{k_2}(y) = (\frac{1}{2a_0^2})^{\frac{1}{4}}(\frac{k_2!(\frac{1}{2a_0^2})^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(k_2+\frac{5}{2})})^{\frac{1}{2}}e^{\frac{-y^2}{4a_0^2}}y^2L_{k_2}^{\frac{3}{2}}(\frac{y^2}{2a_0^2}) \qquad (5.4.34)$$

where $L_k^\nu(z)$ are Laguerre polynomials

We have also the energies

$$E = \frac{\hbar^2(2k_2+2)}{2a_0^2} \qquad (5.4.35)$$

with the corresponding eigenfunctions

$$\psi(x,y) = \chi_{k_2}(y)\phi_0(x), \quad \phi_0(x) = a_0^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{4}}\frac{e^{\frac{-x^2}{4a_0^2}}}{a_0^2+x^2} \qquad (5.4.36)$$

and $\chi_{k_2}(y)$ as Eq.(5.4.34).

5.4.4. Potential 6

We consider the potential

$$V = \hbar^2[\frac{1}{8a^4}(x^2+y^2) + \frac{1}{(y+a)^2} + \frac{1}{(y-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x-a)^2}] \qquad (5.4.37)$$

For the case $a = ia_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}$ we have the energies

$$E = \frac{(k_1 + k_2 + 3)}{2a_0^2}\hbar^2 \tag{5.4.38}$$

with the eigenfunctions given by

$$\phi_{k_1+1}(x) = \frac{a_0}{\sqrt{(k_1+3)}}(\frac{1}{2a_0^2\pi})^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^{k_1}k_1!}}e^{-\frac{x^2}{4a_0^2}}(\frac{(x^3+3xa_0^2)}{a_0^2(x^2+a_0^2)}H_{k_1} - \frac{2k_1}{\sqrt{2}a_0}\lambda H_{k_1-1}) \tag{5.4.39}$$

$$\chi_{k_2+1}(y) = \frac{a_0}{\sqrt{(k_2+3)}}(\frac{1}{2a_0^2\pi})^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^{k_2}k_2!}}e^{-\frac{y^2}{4a_0^2}}(\frac{(y^3+3ya_0^2)}{a_0^2(y^2+a_0^2)}H_{k_2} - \frac{2k_2}{\sqrt{2}a_0}\lambda H_{k_2-1}) \tag{5.4.40}$$

The singlet state in the x part of the Hamiltonian gives the energies

$$E = \frac{\hbar^2(k_2)}{2a_0^2} \tag{5.4.41}$$

with eigenfunctions

$$\psi(x,y) = \chi_{k_2}(y)\phi_0(x), \quad \phi_0(x) = a_0^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{4}}\frac{e^{\frac{-x^2}{4a_0^2}}}{a_0^2+x^2} \tag{5.4.42}$$

and $\chi_{k_2}(y)$ as Eq.(5.4.40).

We also obtain another kind of solution from the singlet state in the y part. The energies are

$$E = \frac{\hbar^2(k_1)}{2a_0^2} \tag{5.4.43}$$

with the corresponding eigenfunctions

$$\psi(x,y) = \phi_{k_1}(x)\chi_0(y), \quad \chi_0(y) = a_0^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{4}}\frac{e^{\frac{-y^2}{4a_0^2}}}{a_0^2+y^2} \tag{5.4.44}$$

and $\phi_{k_1}(x)$ as Eq.(5.4.39).

and a state coming from the singlet state in the two parts with energies

$$E = -\frac{3\hbar^2}{2a_0^2} \tag{5.4.45}$$

with the following expresion for the eigenfunctions

$$\phi_0(x) = a_0^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{4}}\frac{e^{\frac{-x^2}{4a_0^2}}}{a_0^2+x^2}, \quad \chi_0(y) = a_0^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{4}}\frac{e^{\frac{-y^2}{4a_0^2}}}{a_0^2+y^2}. \tag{5.4.46}$$

5.5. Generating spectrum algebra

The supersymmetry allows us to find the creation and annihilation operators of the x part of the irreducible Potential 1. They are given by

$$M = b^\dagger c b, \quad M^\dagger = b^\dagger c^\dagger b \tag{5.5.1}$$

where c and $c^\dagger$ are annihilation and creation operators of the superpartner H_2 that is a harmonic oscillator. We have

$$c = \frac{\hbar}{2a^2}(x + 2a^2\frac{d}{dx}), \quad c^\dagger = \frac{\hbar}{2a^2}(x - 2a^2\frac{d}{dx}) \tag{5.5.2}$$

and

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hbar\frac{d}{dx} - \frac{\hbar}{2a^2}x + \hbar(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a}))\frac{\hbar}{2a^2}(x + 2a^2\frac{d}{dx})\frac{1}{\sqrt{2}}(\hbar\frac{d}{dx} - \frac{\hbar}{2a^2}x + \hbar(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a})) \tag{5.5.3}$$

$$M^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hbar\frac{d}{dx} - \frac{\hbar}{2a^2}x + \hbar(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a}))\frac{\hbar}{2a^2}(x - 2a^2\frac{d}{dx})\frac{1}{\sqrt{2}}(\hbar\frac{d}{dx} - \frac{\hbar}{2a^2}x + \hbar(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a})) \tag{5.5.4}$$

The zero energy ground state given by the Eq.(5.4.12) is annihilated be the annihilation operator but also by the creation operator.

$$M\phi_0(x) = M^\dagger\phi_0 = 0 \tag{5.5.5}$$

The creation and annihilation operator for the y part (H_y) of the Potential 1 are

$$L = \frac{\hbar}{2a^2}(y + 2a^2\frac{d}{dy}), \quad L^\dagger = \frac{\hbar}{2a^2}(y - 2a^2\frac{d}{dy}) \quad . \tag{5.5.6}$$

We have the commutators

$$[M, M^\dagger] = \frac{3}{4}(H + \frac{1}{2}A)^2 - \frac{\hbar^2}{a^2}(H + \frac{1}{2}A) - \frac{3\hbar^4}{16a^4}, \quad [L, L^\dagger] = 1 \quad . \tag{5.5.7}$$

We consider the following operators [16]

$$E_+ = M^\dagger L^\dagger, \quad E_- = ML, \quad F_+ = (M^\dagger)^2, \quad F_- = M^2, \quad G_+ = (L^\dagger)^2, \quad G_- = L^2. \tag{5.5.8}$$

We add to these operators the Hamiltonian, the integrals of motion A, B and C (Eq.(5.3.1) (5.3.2) and (5.3.3)). We have the following quintic algebra that contains 45 relations where the cubic algebra appears as a subalgebra :

$$\begin{aligned}
&[H,A]=0,\quad [H,B]=0,\quad [H,C]=0,\quad [H,E_\pm]=\pm(\frac{\hbar^2}{a^2})E_\pm,\\
&[H,F_\pm]=\pm(\frac{\hbar^2}{a^2})F_\pm,\quad [H,G_\pm]=\pm(\frac{\hbar^2}{a^2})G_\pm,\\
&[A,B]=C,\quad [A,C]=\frac{4\hbar^4}{a^4}B,\quad [A,E_\pm]=0,\quad [A,F_\pm]=\pm(\frac{2\hbar^2}{a^2})F_\pm,\\
&[A,G_\pm]=\mp(\frac{2\hbar^2}{a^2})G_\pm,\quad [B,C]=-2\hbar^2A^3-6\hbar^2A^2H\\
&+8\hbar^2H^3+6\frac{\hbar^4}{a^2}A^2+8\frac{\hbar^4}{a^2}HA-8\frac{\hbar^4}{a^2}H^2+2\frac{\hbar^6}{a^4}A-2\frac{\hbar^6}{a^4}H-6\frac{\hbar^8}{a^6},\\
&[B,E_-]=-2i\hbar F_-+\frac{3i\hbar}{2}(H+\frac{1}{2}A)^2G_--\frac{2i\hbar^3}{a^2}(H+\frac{1}{2}A)G_--\frac{3i\hbar^5}{8a^4}G_-,\\
&[B,E_+]=-2i\hbar F_++\frac{3i\hbar}{2}(H+\frac{1}{2}A)^2G_+-\frac{2i\hbar^3}{a^2}(H+\frac{1}{2}A)G_+-\frac{3i\hbar^5}{8a^4}G_+,\\
&[B,F_-]=3i\hbar(H+\frac{1}{2}A)^2E_--\frac{7i\hbar^3}{a^2}(H+\frac{1}{2}A)E_-+\frac{11i\hbar^5}{4a^4}E_-,\\
&[B,F_+]=3i\hbar(H+\frac{1}{2}A)^2E_+-\frac{i\hbar^3}{a^2}(H+\frac{1}{2}A)E_+-\frac{5i\hbar^5}{4a^4}E_+,\\
&[B,G_+]=-4i\hbar E_+,\quad [B,G_-]=-4i\hbar E_-,\\
&[C,E_-]=\frac{4i\hbar^3}{a^3}F_-+\frac{3i\hbar^3}{a^2}(H+\frac{1}{2}A)^2G_--\frac{4i\hbar^5}{a^4}(H+\frac{1}{2}A)G_--\frac{3i\hbar^7}{4a^6}G_-,\\
&[C,E_+]=\frac{-4i\hbar^3}{a^3}F_+-\frac{3i\hbar^3}{a^2}(H+\frac{1}{2}A)^2G_++\frac{4i\hbar^5}{a^4}(H+\frac{1}{2}A)G_++\frac{3i\hbar^7}{4a^6}G_+,\\
&[C,F_-]=\frac{6i\hbar^3}{a^2}(H+\frac{1}{2}A)^2E_--\frac{14i\hbar^5}{a^4}(H+\frac{1}{2}A)E_-+\frac{11i\hbar^7}{2a^6}E_-,\\
&[C,F_+]=-\frac{6i\hbar^3}{a^2}(H+\frac{1}{2}A)^2E_++\frac{2i\hbar^5}{a^4}(H+\frac{1}{2}A)E_++\frac{5i\hbar^7}{2a^6}E_+,\\
&[C,G_\pm]=\mp\frac{8i\hbar^3}{a^2}E_\pm,\quad [E_\pm,F_\pm]=0,\quad [E_\pm,G_\pm]=0,\\
&[E_-,E_+]=\frac{-a^2\hbar^2}{16}A^3+\frac{3a^2\hbar^2}{4}AH^2+a^2\hbar^2H^3+\frac{\hbar^4}{8}A^2\\
&-\frac{\hbar^4}{2}AH-\frac{3\hbar^4}{2}H^2+\frac{\hbar^6}{16a^2}A-\frac{\hbar^6}{4a^2}H+\frac{3\hbar^8}{8a^4},\\
&[E_+,F_-]=\frac{-3ia^2\hbar}{16}C(H+\frac{1}{2}A)^2+\frac{3i\hbar^3}{8}B(H+\frac{1}{2}A)^2+\frac{7i\hbar^3}{16}C(H+\frac{1}{2}A)\\
&-\frac{7i\hbar^5}{8a^2}B(H+\frac{1}{2})-\frac{11i\hbar^5}{64a^2}C+\frac{11i\hbar^7}{32a^4}B,\\
&[E_-,F_+]=\frac{3ia^2\hbar}{16}C(H+\frac{1}{2}A)^2+\frac{3i\hbar^3}{8}B(H+\frac{1}{2}A)^2-\frac{i\hbar^3}{16}C(H+\frac{1}{2}A)
\end{aligned}\tag{5.5.9}$$

$$-\frac{i\hbar^5}{8a^2}B(H+\frac{1}{2})-\frac{5i\hbar^5}{64a^2}C-\frac{5i\hbar^7}{32a^4}B,$$

$$[E_-,G_+]=\frac{ia^2\hbar}{4}C-\frac{i\hbar^3}{2}B,\quad [E_+,G_-]=\frac{-ia^2\hbar}{4}C-\frac{i\hbar^3}{2}B,$$

$$[F_-,F_+]=\frac{3a^2\hbar^2}{4}(H+\frac{1}{2}A)^5-\frac{5\hbar^4}{2}(H+\frac{1}{2}A)^4+\frac{25\hbar^6}{8a^2}(H+\frac{1}{2}A)^3$$

$$-\frac{5\hbar^8}{4a^4}(H+\frac{1}{2}A)^2-\frac{53\hbar^{10}}{64a^6}(H+\frac{1}{2}A)+\frac{15\hbar^{12}}{32a^8},$$

$$[F_\pm,G_\pm]=[F_\pm,G_\mp]=0,\quad [G_-,G_+]=4a^2\hbar^2(H-\frac{1}{2}A).$$

This polynomial algebra is the spectrum-generating algebra.

5.6. Complexification of superintegrable potentials

In quantum mechanics textbooks the Hermiticity of the Hamiltonian is often presented as a condition for the energy spectrum to be real. There exist other requirements that can be chosen without loosing essential features of quantum mechanics. One requirement that appears more physical is the space-time reflection symmetry i.e. the Hamiltonian is invariant under the PT transformation [42], i.e. the simultaneous reflections P : x→-x, p→-p and τ : x→x p→-p, i→-i. For potentials invariant under such transformations the energy spectrum can also consist of complex-conjugate pairs of eigenvalues. The PT-symmetry is thus said to be broken. The notion of Pseudo-Hermiticity was introduced by A.Mostafazadeh [43]. He shows also that every Hamiltonian with a real spectrum is pseudo-Hermitian and that all PT-symmetric Hamiltonians studied belong to the class of pseudo-Hermitian Hamiltonian. The replacement of the condition that the Hamiltonian is Hermitian by a weaker condition allows us to study many new kinds of Hamiltonians that would have been excluded and from a phenomenological point of view may describe physic phenomena. The case $H=p^2+x^2(ix)^\delta$ was studied in detail by C.Bender in 1998 [42].

Complexification has been proposed as a natural way to regularize singular potentials [41]. It consists in a transformation of the type x → x - iϵ applied to a potential. The harmonic oscillator and the Smorodinsky-Winternitz potential are

PT-symmetric Hamiltonian after a complexification [41].

We will consider the complexification of the Hamiltonian

$$H = H_x + H_y = \frac{P_x^2}{2} + \frac{P_y^2}{2} + \hbar^2 \left(\frac{(x-i\epsilon)^2 + (y-i\epsilon)^2}{8a^4} + \frac{1}{(x-i\epsilon-a)^2} + \frac{1}{(x-i\epsilon+a)^2} \right). \tag{5.6.1}$$

The complex harmonic oscillator Hamiltonian H_y is known to be PT-symmetric. It's energy spectrum is real, namely :

$$E = \frac{\hbar^2}{2a^2}(m + \frac{1}{2}) \quad . \tag{5.6.2}$$

The eigenfunctions are

$$\phi_m(y) = N_m e^{-\frac{(y-i\epsilon)^2}{4a^2}} H_m\left(\frac{(y-i\epsilon)}{\sqrt{2}a}\right) \tag{5.6.3}$$

(here and below N_m is a normalization constant).

To get the energy spectrum and the eigenfunctions of H_x we complexify the operators given by the Eq.(5.4.8) and (5.4.9). We get two PT-symmetric Hamiltonians. This transformation allows to regularize H_x when $a \in \mathbb{R}$. The (real) energy levels and eigenfunctions of the Hamiltonian H_2 are known.

$$H_1 = b'b = \frac{P_x^2}{2} + \frac{\hbar^2(x-i\epsilon)^2}{8a^4} + \frac{\hbar^2}{(x-i\epsilon-a)^2} + \frac{\hbar^2}{(x-i\epsilon+a)^2} - \frac{3\hbar^2}{4a^2} \tag{5.6.4}$$

$$H_2 = bb' = \frac{P_x^2}{2} + \frac{\hbar^2(x-i\epsilon)^2}{8a^4} - \frac{5\hbar^2}{4a^2} \tag{5.6.5}$$

The Darboux transformation is still valid for non-Hermitian Hamiltonians but supersymmetry is replaced by pseudo-supersymmetry [44]. We have $b'\psi_{gr} = 0$ that correspond to the zero energy state of H_2

$$\psi_{gr} = N_{gr} e^{-\frac{(x-i\epsilon)^2}{4a^2}} (a^2 - (x-i\epsilon)^2) \tag{5.6.6}$$

We can obtain the eigenfunction of H_1 by applying b' on other state of H_2 given in terms of Hermite polynomials. We get

$$\phi_n = N_n e^{\frac{-(x-i\epsilon)^2}{4a^2}} (\frac{2(x-i\epsilon)}{(x-i\epsilon)^2 - a^2} H_{n+3}(\frac{(x-i\epsilon)}{\sqrt{2}a}) - \frac{2(n+3)}{\sqrt{2}a} H_{n+2}(\frac{(x-i\epsilon)}{\sqrt{2}a})) \tag{5.6.7}$$

Let us give the explicit expression for the ground state and the first excited state

$$\phi_0 = N_0 e^{\frac{-(x-i\epsilon)^2}{4a^2}} \frac{(3a^4 + (x-i\epsilon)^4)}{(a^2 - (x-i\epsilon)^2)} \tag{5.6.8}$$

$$\phi_1 = N_1 e^{\frac{-(x-i\epsilon)^2}{4a^2}} \frac{(3a^4 + 2a^2 i(x-i\epsilon) + (x-i\epsilon)^4)(x-i\epsilon)}{(a^2 - (x-i\epsilon)^2)} \tag{5.6.9}$$

The probabilistic interpretation of the wave function of non-Hermitian quantum systems [45] is given by a pseudo-norm that is not positive definite.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(-x)\psi(x) = \sigma, \quad \sigma = \pm 1 \tag{5.6.10}$$

The corresponding energy spectrum is given by

$$E_n = \frac{(n+1)\hbar^2}{2a^2} \tag{5.6.11}$$

We obtain for the complexified superintegrable potential the energy spectrum

$$E = \frac{(n+m+3)\hbar^2}{2a^2} = \frac{(p+3)\hbar^2}{2a^2} \tag{5.6.12}$$

with eigenfunction given by Eq.(5.6.3) and (5.6.7).

5.7. Conclusion

The main result of this article is that we have constructed a Fock type representation for the most general cubic algebra generated by a second order and a third order order integral of motion by the means of parafermionic algebras. We present in detail the cubic algebra for all irreducible quantum superintegrable potentials, the unitary representations and the corresponding energy spectra. All cases with finite cubic algebras belong to Case 2 of Section 2. Thus they correspond to $\beta = 0$ in Eq.(5.2.5) and the structure function is given by Eq. (5.2.22). In two cases of irreducible potentials the integrals of motion do not close in a finite dimensional cubic algebra. It could be interesting to see what kind algebraic structure is involved in these cases. Comparing with a earlier article [10] we can see from this article how the cubic Poisson algebra is deformed into a cubic algebra in quantum mechanics.

The method that we use to find energy spectra with the cubic algebra is independant of the choice of coordinate systems. We could apply these results in the future to systems with a third order integral that are separable in polar, elliptic or parabolic coordinates. The method is also independant of the metric and could be applied to superintegrable systems in other spaces. The methods developed in this article could be applied to other physical systems. One such system is a Schrödinger equation with a position dependent mass [32], others arise in the context of supersymmetric quantum mechanics.

The Potential 3 is also a special case of the following potential [46,47]

$$V = \frac{\omega^2}{2}(k^2x^2 + m^2y^2) + \frac{\lambda_1}{x^2} + \frac{\lambda_2}{y^2} \tag{5.7.1}$$

In general this system has integrals of motion of order greater than 3 and the more complicated polynomial algebra should be studied.

All the potentials considered in this article can also be viewed as the sum of two one-dimensional potentials $H = H_x + H_y$. We have investigated each of these unidimensional potentials in terms of supersymmetric quantum mechanics. The superintegrability of these two-dimensional potentials seems to be related to the supersymmetry property. Using the supersymmetry we have obtained the energy spectra and the eigenfunctions. We have compared the results with those obtained using the cubic algebras. One particular feature is the appearance of singlet states. For the Potential 1 there is an additional degeneracy that is not obtained by the algebraic method using the cubic algebra.

It was shown that many well known potentials such Dirac delta and Poschl-Teller display a hidden SUSY where the reflection (parity) operator play the role of the grading operator [48]. Potentials with elliptic functions can also be discussed from this point of view [49]. Potentials with elliptic functions appear in Ref. 9. These cases are not truly superintegrable since there exists a syzygy between the Hamiltonian, second order integral and the third order integral of motion but it has been shown that the third order integral can be used to obtain the eigenfunctions and the spectrum [50]. We leave quantum potentials involving Painlevé transcendents for a future article.

Superintegrable potentials and their integrals of motion can be complexified and investigated from the point of view of PT-symmetric quantum mechanics. The complexification appears also as a natural way to regularize the singular potentials.

It's would be interesting to investigate the relation of pseudo-Hermitian Hamiltonians and supersymmetry with superintegrable systems.

Acknowledgments The research of I.M. is supported by a doctoral research scholarship from FQRNT of Quebec. The author thanks P.Winternitz for very helpful comments and discussions. This article was written in part while he was attending the conference Superintegrable Systems in Classical and Quantum Mechanics-Prague 2008 at the Czech Technical University of Prague. He thanks the Doppler Institute and the Department of Physics of the Faculty of Nuclear Sciences and Physical Enginnering for hospitality and the research plan MSM6840770039 of the Ministry of Education of the Czech Republic for financial support during the conference.

5.8. APPENDIX

Structure function for the case $\beta \neq 0$

$$(A1)\qquad \Phi(N) = 384\mu\beta^{10}N^{10} - 1920\mu\beta^{10}N^9 + (-1536\delta\mu\beta^8 + 1024\nu\beta^9 + 3040\mu\beta^{10}$$

$$-2304\beta^8\alpha^2)N^8 + (6144\delta\mu\beta^8 - 4096\nu\beta^9 - 640\mu\beta^{10} + 6144\beta^8\alpha^2)N^7 + (2304\delta^2\mu\beta^6 - 3072\nu\delta\beta^7$$

$$3072\xi\beta^8 - 7680\delta\mu\beta^8 + 5120\nu\beta^9 - 2512\mu\beta^{10} - 3072\delta\beta^6\alpha^2 + 2304\beta^8\alpha^2 + 3072\beta^7\alpha\gamma)N^6$$

$$+(-6912\delta^2\mu\beta^6 + 9216\nu\delta\beta^7 - 9216\xi\beta^8 + 1536\delta\mu\beta^8 - 1024\nu\beta^9 + 1712\mu\beta^{10} + 9216\delta\beta^6\alpha^2$$

$$-7680\beta^8\alpha^2 - 9216\beta^7\alpha\gamma)N^5 + (-1536\delta^3\mu\beta^4 + 3072\nu\delta^2\beta^5 - 6144\xi\delta\beta^6 + 6336\delta^2\mu\beta^6$$

$$-8448\nu\delta\beta^7\alpha\gamma + 8448\xi\beta^8 + 3264\delta\mu\beta^8 - 2176\nu\beta^9 + 428\mu\beta^{10}$$

$$+4608\delta^2\beta^4\alpha^2 - 8448\delta\beta^6\alpha^2 + 672\beta^8\alpha^2 - 9216\delta\beta^5\alpha\gamma + 8448\beta^7$$

$$+3072\beta^6\gamma^2 + 6144\beta^6\alpha\epsilon + 12288\beta^7\zeta)N^4 + (3072\delta^3\mu\beta^4 - 6144\nu\delta^2\beta^5$$

$$+12288\xi\delta\beta^6 - 1152\delta^2\mu\beta^6 + 1536\nu\delta\beta^7 - 1536\xi\beta^8 - 1920\delta\mu\beta^8 + 1280\nu\beta^9 - 616\mu\beta^{10} - 12288\delta^2\beta^4\alpha^2$$

$$+1536\delta\beta^6\alpha^2 + 2688\beta^8\alpha^2 + 24576\delta\beta^5\alpha\gamma - 1536\beta^7\alpha\gamma - 6144\beta^6\gamma^2 - 24576\beta^6\alpha\epsilon - 24576\beta^7\zeta)N^3$$

$$+(384\delta^4\mu\beta^2 - 1024\nu\delta^3\beta^3 + 3072\xi\delta^2\beta^4 - 1792\delta^3\mu\beta^4 + 3584\nu\delta^2\beta^5 - 9216\xi\delta\beta^6 - 784\delta^2\mu\beta^6 - 1728\xi\beta^8$$

$$+1728\nu\delta\beta^7 - 96\delta\mu\beta^8 + 64\nu\beta^9 + \frac{119}{2}\mu\beta^{10} - 12288\beta^6K - 3072\delta^3\beta^2\alpha^2 + 6912\delta^2\beta^4\alpha^2 + 1728\delta$$

$$\beta^6\alpha^2 - 624\beta^8\alpha^2 + 9216\delta^2\beta^3\alpha\gamma - 13824\delta\beta^5\alpha\gamma - 1728\beta^7\alpha\gamma - 6144\delta\beta^4\gamma^2 + 1536\beta^6\gamma^2$$

$$-12288\delta\beta^4\alpha\epsilon + 9216\beta^6\alpha\epsilon + 12288\beta^5\gamma\epsilon - 12288\delta\beta^5\zeta + 18432\beta^7\zeta)N^2 + (-384\delta^4\mu\beta^2$$

$$+1024\nu\delta^3\beta^3 - 3072\xi\delta^2\beta^4 + 256\delta^3\mu\beta^4 - 512\nu\delta^2\beta^5 + 3072\xi\delta\beta^6 + 208\delta^2\mu\beta^6$$

$$-960\nu\delta\beta^7 + 960\xi\beta^8 + 288\delta\mu\beta^8 - 192\nu\beta^9 + \frac{129}{2}\mu\beta^{10}12288\beta^6K + 3072\delta^3\beta^2\alpha^2 - 960\delta\beta^6\alpha^2 -$$

$$288\beta^8\alpha^2 - 9216\delta^2\beta^3\alpha\gamma + 960\beta^7\alpha\gamma + 6144\delta\beta^4\gamma^2 + 1536\beta^6\gamma^2 12288\delta\beta^4\alpha\epsilon$$

$$+6144\beta^6\alpha\epsilon - 12288\beta^5\gamma\epsilon + 12288\delta\beta^5\zeta - 6144\beta^7\zeta)N + (96\delta^4\mu\beta^2 - 256\nu\delta^3\beta^3 + 768\xi\delta^2\beta^4$$

$$+32\delta^3\mu\beta^4 - 64\nu\delta^2\beta^5 - 384\xi\delta\beta^6 + 20\delta^2\mu\beta^6 + 144\nu\delta\beta^7 - 144\xi\beta^8 - 54\delta\mu\beta^8 + 36\nu\beta^9$$

$$-\frac{117}{8}\mu\beta^{10} - 3072\beta^6K + 768\delta^4\alpha^2 - 768\delta^3\beta^2\alpha^2 - 480\delta^2\beta^4\alpha^2 + 144\delta\beta^6\alpha + 87\beta^8\alpha^2$$

$$-3072\delta^3\beta\alpha\gamma + 2304\delta^2\beta^3\alpha\gamma + 960\delta\beta^5\alpha\gamma - 144\beta^7\alpha\gamma + 3072\delta^2\beta^2\gamma^2$$

$$-1536\delta\beta^4\gamma^2 - 576\beta^6\gamma^2 + 6144\delta^2\beta^2\alpha\epsilon - 3072\delta\beta^4\alpha\epsilon - 2688\beta^6\alpha$$

$$\epsilon - 12288\delta\beta^3\gamma\epsilon + 3072\beta^5\gamma\epsilon + 12288\beta^4\epsilon^2 - 3072\delta\beta^5\zeta + 768\beta^7\zeta$$

5.9. References

[1] V.Fock, Z.Phys. 98, 145-154 (1935).

[2] V.Bargmann, Z.Phys. 99, 576-582 (1936).

[3] J.M.Jauch and E.L.Hill, Phys.Rev. 57, 641-645 (1940).

[4] M.Moshinsky and Yu.F.Smirnov, The Harmonic Oscillator In Modern Physics, (Harwood, Amsterdam, 1966).

[5] J.Fris, V.Mandrosov, Ya.A.Smorodinsky, M.Uhlir and P.Winternitz, Phys.Lett. 16, 354-356 (1965).

[6] P.Winternitz, Ya.A.Smorodinsky, M.Uhlir and I.Fris, Yad.Fiz. 4, 625-635 (1966). (English translation in Sov. J.Nucl.Phys. 4, 444-450 (1967)).

[7] J.Drach, C.R.Acad.Sci.III, 200, 22 (1935), 200, 599 (1935).

[8] S.Gravel and P.Winternitz, J.Math.Phys. 43 (12), 5902 (2002).

[9] S.Gravel, J.Math.Phys. 45(3), 1003-1019 (2004).

[10] I.Marquette and P.Winternitz, J.Math.Phys. 48 (1), 012902 (2007).

[11] E.L.Ince, Ordynary Differential Equations, Dover, New York (1956).

[12] Ya.I.Granovskii, A.S.Zhedanov and I.M.Lutzenko, J. Phys. A24, 3887-3894 (1991).

[13] P.Letourneau and L.Vinet, Ann.Phys. 243, 144 (1995).

[14] D.Bonatsos, C.Daskaloyannis and K.Kokkotas, Phys.Rev. A48, R3407-R3410 (1993).

[15] D.Bonatsos, C.Daskaloyannis and K.Kokkotas, Phys. Rev.A 50, 3700-3709 (1994).

[16] P.Letourneau and L.Vinet, Ann.Phys. 243, 144 (1995).

[17] C.Daskaloyannis, J.Math.Phys. 42, 1100 (2001).

[18] C.Daskaloyannis, Generalized deformed oscillator and nonlinear algebras, J.Phys.A : Math.Gen 24, L789-L794 (1991).

[19] E.G.Kalnins, W.Miller and S.Post, SIGMA 4, 008 (2008).

[20] V.Sunilkumar, arXiv :math-ph/0203047 (2002).

[21] V.Sunilkumar, B.A.Bambah and R.Jagannathan, J.Phys. A :Math.Gen.34, 8583 (2001).

[22] V.Sunilkumar, B.A.Bambah and R.Jagannathan, mod. Phys. Lett. A17, 1559

(2002).

[23] Y.A.Golfand and E.P.Likhtman, JETP Lett. 13, 323 (1971), A.Neveu and J.H.Schwarz, Nucl.Phys. B31, 86 (1971), J.Wess and B.Zumino, Nucl.Phys. B70, 39 (1974), M.F.Sohnius, Phys.Rep.128, 39 (1985).

[24] E.Witten, Nucl.Phys. B188, 513 (1981).

[25] G.Darboux, C.R.Acad.Sci. Paris, 94, 1459 (1882)

[26] T.F.Moutard, C.R.Acad.Sci. Paris, 80, 729 (1875), J.de L'école Politech., 45, 1 (1879).

[27] E.Schrodinger, Proc.Roy. Irish Acad., 46A, 9 (1940), 47A, 53 (1941).

[28] L.Infeld and T.E.Hull, Rev.Mod.Phys., 23, 21 (1951).

[29] G.Junker, Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics, Springer, New York, (1995).

[30] A.Khare and R.K.Bhaduri, Am.J.Phys, 62, 1008-1014 (1994)

[31] L.Gendenshtein, JETP Lett., 38, 356 (1983).

[32] C.Quesne, SIGMA 3, 067 (2007).

[33] S.Gravel, ArXiv :math-ph/0310004 (2004).

[34] B.Mielnik, J. Math. Phys. 25, 12 (1984).

[35] Liu Ke-Jia, Chin. Phys. Soc,10, 4 (2001).

[36] D.J.Fernandez C,V.Hussin and L.M.Nieto, J.Phys.A :Math. Gen. 27, 3547 (1994).

[37] A.Jevicki and J.P.Rodrigues, Phys.Lett. B 146, 55 (1984).

[38] J.Casahorran and J.G.Esteve, J.Phys.A :Math. Gen. 25 L347 (1992).

[39] I.F.Marquez, J.Negro and L.M.Nieto, J.Phys. A :Math. Gen. 31, 4115 (1998).

[40] A.Das and S.A.Pernice, Nucl.Phys.B 561, 357 (1999).

[41] M.Znojil,Nucl.Phys.B662,554 (2003), M.Znojil, Phys.Lett. A 259, 220 (1999).

[42] C.Bender, S.Boettcher and P.Meisinger, J.Math.Phys. 40, 2201 (1999).

[43] A.Mostafazadeh, J.Math.Phys., 43, 205 (2002).

[44] A.Sinha and P.Roy, Czech J.Phys. 54, 1, 129 (2004).

[45] B.Bagchi, C.Quesne and M.Znojil, Mod.Phys.Lett. A 16, 2047 (2001).

[46] P.E.Verrier and N.W.Evans, J.Math.Phys. 49, 022902 (2008).

[47] M.A.Rodriguez, P.Tempesta and P.Wintertnitz, Phys. Rev. E78, 046608

(2008).

[48] M.S.Plyushchay, Annals Phys. (N.Y.) 245, 339 (1996), M.Plyushchay, Int.J.Mod.Phys. A15, 3679 (2000), F.Correa and M.Plyushchay, Annals Phys.322, 2493 (2007).

[49] F.Correa, L-M.Nieto and M.S.Plyushchay, Phys.Lett. B644, 94 (2007), F.Correa, V.Jakubsky, L-M.Nieto and M.S.Plyushchay, Phys.Rev.Lett. 101, 030403 (2008).

[50] J.Hietarinta, Phys.Lett.A, 246, 1, 97 (1998).

DESCRIPTION DE L'ARTICLE 3

Ce troisième article est la suite des deux premiers articles dans lesquels nous avons fait l'études des trajectoires et algèbres de Poisson des systèmes classiques et fait l'étude des systèmes quantiques contenant des fonctions rationnelles.
Dans cet article, on étudie le potentiel écrit en terme de la quatrième transcendente de Painlevé. Je suis le seul auteur de cet article.

Cet article a été accepté par le Journal of Mathematical Physics.
Voici le titre et la référence sur les achives :

I. Marquette, Superintegrability with third order integrals of motion, cubic algebras and supersymmetric quantum mechanics II : Painlevé transcendent potentials, ArXiv :0811.1568 (à paraître dans le numéro spécial Integrable Quantum Systems and Solvable Statistical Mechanics Models, J.Math.Phys. 50 9 2009).

Par souci d'une plus grande uniformité de la thèse, les équations sont dénotées par (6.i.j) plutôt que par (i.j).

Chapitre 6

SUPERINTEGRABILITY WITH THIRD ORDER INTEGRALS OF MOTION, CUBIC ALGEBRAS AND SUPERSYMMETRIC QUANTUM MECHANICS II : PAINLEVÉ TRANSCENDENT POTENTIALS

We consider a superintegrable quantum potential in two-dimensional Euclidean space with a second and a third order integral of motion. The potential is written in terms of the fourth Painlevé transcendent. We construct for this system a cubic algebra of integrals of motion. The algebra is realized in terms of parafermionic operators and we present Fock type representations which yield the corresponding energy spectra. We also discuss this potential from the point of view of higher order supersymmetric quantum mechanics and obtain ground state wave functions.

6.1. Introduction

Over the years many articles have been devoted to superintegrable systems with second order integrals of motion [1-12]. Integrable and superintegrable systems with third order integrals have also been studied, albeit to a lesser degree

[13,14,15,16,17,18,19]. This article is the second in a series [18] devoted to superintegrable systems in quantum mechanics in two-dimensional Euclidean space E_2. All classical and quantum potentials with one second and one third order integral of motion that separate in Cartesian coordinates in the two-dimensional Euclidean space were found by S.Gravel [16]. There are 21 quantum potentials and 8 classical ones. The systems investigated are of the form

$$H = \frac{P_x^2}{2} + \frac{P_y^2}{2} + g_1(x) + g_2(y) \quad , \tag{6.1.1}$$

$$A = \frac{P_x^2}{2} - \frac{P_y^2}{2} + g_1(x) - g_2(y) \quad , \tag{6.1.2}$$

$$B = \sum_{i+j+k=3} A_{ijk}\{L_3^i, p_1^j p_2^k\} + \{l_1(x,y), p_1\} + \{l_2(x,y), p_2\} \quad , \tag{6.1.3}$$

where $\{,\}$ is an anticommutator, $L_3 = xP_2 - yP_1$ is the angular momentum. The constants A_{ijk} and functions V, l_1 and l_2 are known [16].

The quantum case contains very interesting potentials written in term of higher transcendental functions. The irreducible potentials with rational functions were studied [18]. Polynomial algebras [18-27,29,30,31] and the parafermionic realizations of these algebras were found. The parafermionic realizations made it possible to construct Fock type representations and to obtain the energy spectra. We also studied these potentials from the point of view of the supersymmetric quantum mechanics [32-41].

Among the 21 types of superintegrable quantum potentials 5 of the irreducible ones are expressed in terms of Painlevé transcendents [42]. Let us present one of the superintegrable potentials of Ref.16 written in terms of the fourth Painlevé transcendent $P_4(z,\alpha,\beta)$:

$$g_1(x) = \frac{\omega^2}{2}x^2 + \epsilon\frac{\hbar\omega}{2}f'(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x) + \frac{\omega\hbar}{2}f^2(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x) + \omega\sqrt{\hbar\omega}xf(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x) + \frac{\hbar\omega}{3}(-\alpha+\epsilon) \quad , \tag{6.1.4}$$

$$g_2(x) = \frac{\omega^2}{2}y^2 \quad , \tag{6.1.5}$$

where $\epsilon = \pm 1$, $f' = \frac{df}{dz}$, $z = \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x$

$$f''(z) = \frac{f'^2(z)}{2f(z)} + \frac{3}{2}f^3(z) + 4zf^2(z) + 2(z^2 - \alpha)f(z) + \frac{\beta}{f(z)} \quad , \tag{6.1.6}$$

$$f(z) = P_4(z, \alpha, \beta). \tag{6.1.7}$$

The six Painlevé transcendent functions appear in the theory of nonlinear differential equations. The occurence of Painlevé transcendents as superintegrable potentials seems somewhat surprising. It is less so once we remember the relation between the Schrödinger equation and the Korteweg-de Vries equation [43]. Solutions of the KdV include Painlevé transcendents. Unidimensional potentials expressed in terms of Painlevé transcendents were also obtained in the context of the dressing chains method [44,45,46] and conditionals and higher symmetries [47]. An important aspect of the fourth Painlevé transcendent is the existence of particular solutions in terms of rational functions and classical special functions for very specific values of the two parameters α and β [48].

All Hamiltonians of Ref.16 are, by construction, the sum of two unidimensional Hamiltonians ($H = H^x + H^y$). All the quantum potentials with rational function were related to supersymmetric quantum mechanics [19]. Higher order SUSYQM and shape invariance have been investigated [49,50,51,52,53,54,55]. In the case of the potential given by Eq.(6.1.4) and (6.1.5) the Hamiltonian H^y is the well known harmonic oscillator. The Hamiltonian H^x the corresponding Schrödinger equation has been obtained as a special case of third order shape invariance and solved [51].

This article is organized in the following way. In Section 2 we construct the Fock type representations for the superintegrable potential given by the Eq.(6.1.1) by the means of realizations of cubic algebras in terms of a parafermionic algebra. In the Section 3 we will recall some aspects of third order shape invariance that are related to the potential given by Eq.(6.1.4) and (6.1.5) with $\epsilon = -1$. We will also treat the case with $\epsilon = 1$. We will relate these results to those obtained using the approach involving the cubic algebra. In Section 4 we will consider special cases and apply results of Section 2 and Section 3.

6.2. Cubic and parafermionic algebras

We consider a quantum superintegrable Hamiltonian in E2 involving the fourth Painlevé trascendent. We have two cases ϵ=1 and ϵ=-1 (with $\omega > 0$)

$$H = \frac{P_x^2}{2} + \frac{P_y^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}y^2 + g_1(x) \quad , \tag{6.2.1}$$

with $g_1(x)$ given in (6.1.4). This Hamiltonian has two integrals of motion. The one of the second order is given by Eq.(6.1.2) and Eq.(6.1.4). The third order one is given by the following equation :

$$B = \frac{1}{2}\{L, P_x^2\}+\frac{1}{2}\{\frac{\omega^2}{2}x^2y-3yg_1(x), P_x\}-\frac{1}{w^2}\{\frac{\hbar^2}{4}g_{1xxx}(x)+(\frac{\omega^2}{2}x^2-3g_1(x))g_{1x}(x), P_y\}, \tag{6.2.2}$$

where $L = xP_y - yPx$.

The operators A and B generate the following cubic algebra

$$[A, B] \equiv C \quad [A, C] = 16\omega^2\hbar^2 B \tag{6.2.3}$$

$$[B, C] = -2\hbar^2 A^3 - 6\hbar^2 HA^2 + 8\hbar^2 H^3$$

$$+\frac{\omega^2\hbar^4}{3}(4\alpha^2 - 20 - 6\beta - 8\epsilon\alpha)A - 8\omega^2\hbar^4 H$$

$$+\frac{\hbar^5\omega^3}{27}(-8\alpha^3 - 24\alpha - 36\alpha\beta + 24\epsilon\alpha^2 + 8\epsilon + 36\epsilon\beta) \quad .$$

The Casimir operator can be written as a polynomial in the Hamiltonian

$$K = -16\hbar^2 H^4 + \frac{4\hbar^4\omega^2}{3}(4\alpha^2 - 8\alpha + 4 - \alpha\beta)H^2 \tag{6.2.4}$$

$$-\frac{4\hbar^5\omega^3}{27}(8\alpha^3 - 24\epsilon\alpha^2 + 24\alpha + 36\alpha\beta - 8\epsilon - 36\epsilon\beta)H$$

$$-\frac{4\hbar^6\omega^4}{3}(4\alpha - 8\epsilon\alpha - 8 - 6\beta) \quad .$$

Realizations of cubic algebras in terms of parafermionic algebras have been discussed in our previous article [19]. Our potential belong to the Case 2 of Ref.19. The cubic algebra has the form :

$$[A,B] = C, \quad [A,C] = \delta B, \quad [B,C] = \mu A^3 + \nu A^2 + \xi A + \zeta \quad , \tag{6.2.5}$$

where

$$\mu = \mu_0, \quad \nu = \nu_0 + \nu_1 H, \quad \xi = \xi_0 + \xi_1 H + \xi_2 H^2 \tag{6.2.6}$$

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H + \zeta_2 H^2 + \zeta_3 H^3, \quad \delta = \delta_0 + \delta_1 H \quad .$$

This algebra has been realized in terms of a deformed oscillator algebra of the form

$$[N, b^t] = b^t, \quad [N, b] = -b, \quad b^t b = \Phi(N), \quad bb^t = \Phi(N+1) \quad . \tag{6.2.7}$$

The structure function $\Phi(N)$ is given by

$$\Phi(N) = (\frac{K}{-4\delta} - \frac{\zeta}{4\sqrt{\delta}}) + (-\frac{\xi}{4} + \frac{\zeta}{2\sqrt{\delta}} + \frac{\nu\sqrt{\delta}}{12})(N+u) \tag{6.2.8}$$

$$+(\frac{-\nu\sqrt{\delta}}{4} + \frac{\xi}{4} + \frac{\mu\delta}{8})(N+u)^2 + (\frac{\nu\sqrt{\delta}}{6} - \frac{\mu\delta}{4})(N+u)^3 + (\frac{\mu\delta}{8})(N+u)^4 \quad .$$

We can use Eq.(6.2.4) to rewrite the structure function in terms of the Hamiltonian.

6.2.1. Case $\epsilon = 1$.

From the general formula we obtain for our particular case the following structure function for $\epsilon = 1$

$$\Phi(x) = -4\omega^2\hbar^4(x + u - (\frac{E}{2\hbar\omega} + \frac{1}{2}))(x + u - (\frac{-E}{2\hbar\omega} + \frac{5}{6} - \frac{\alpha}{3})) \qquad (6.2.9)$$
$$(x + u - (\frac{-E}{2\hbar\omega} + \frac{1}{6}(\alpha + 2 - 3i\sqrt{\frac{\beta}{2}})))(x + u - (\frac{-E}{2\hbar\omega} + \frac{1}{6}(\alpha + 2 + 3i\sqrt{\frac{\beta}{2}}))) \quad .$$

To obtain unitary representations [25,26] we should impose three constraints given by

$$\Phi(p+1, u_i, k) = 0, \quad \Phi(0, u, k) = 0, \quad \phi(x) > 0, \quad \forall \quad x > 0 \quad . \qquad (6.2.10)$$

We have to distinguish the two cases $\beta < 0$ and $\beta > 0$. For $\beta < 0$ we get four possible values for u with $\Phi(0, u, k) = 0$

$$u_1 = \frac{-E}{2\hbar\omega} + \frac{5}{6} - \frac{\alpha}{3}, \quad u_2 = \frac{-E}{2\hbar\omega} + \frac{1}{6}(\alpha + 2 + 3\sqrt{\frac{-\beta}{2}}) \qquad (6.2.11)$$
$$u_3 = \frac{-E}{2\hbar\omega} + \frac{1}{6}(\alpha + 2 - 3\sqrt{\frac{-\beta}{2}}), \quad u_4 = \frac{E}{2\hbar\omega} + \frac{1}{2} \quad .$$

We insert all these solutions for u and apply the constraint $\Phi(p+1, u_i, k) = 0$, with i=1,2,3,4 to find the energy spectrum.

Case 1

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p + 1 - x)(x + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{-\beta}{8}})(x + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{-\beta}{8}}) \quad (6.2.12)$$
$$E = \hbar\omega(p + \frac{4}{3} - \frac{\alpha}{3}). \qquad (6.2.13)$$

Case 2

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p + 1 - x)(x + \sqrt{\frac{-\beta}{2}})(x - \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{-\beta}{8}}) \qquad (6.2.14)$$

$$E = \hbar\omega(p + \frac{5}{6} + \frac{\alpha}{6} + \sqrt{\frac{-\beta}{8}}). \qquad (6.2.15)$$

Case 3

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x - \sqrt{\frac{-\beta}{2}})(x - \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{-\beta}{8}}), \qquad (6.2.16)$$

$$E = \hbar\omega(p + \frac{5}{6} + \frac{\alpha}{6} - \sqrt{\frac{-\beta}{8}}). \qquad (6.2.17)$$

Case 4

We get three solutions for this case with negative energy

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)((p+\frac{1}{2})+\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{-\beta}{8}}-x)((p+\frac{1}{2})+\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{-\beta}{8}}-x), \qquad (6.2.18)$$

$$E = -\hbar\omega(p + \frac{2}{3} + \frac{\alpha}{3}), \qquad (6.2.19)$$

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)((p+\frac{3}{2})-\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{-\beta}{8}}-x)((p+1)-\sqrt{\frac{-\beta}{2}}-x), \qquad (6.2.20)$$

$$E = -\hbar\omega(p + \frac{7}{6} - \frac{\alpha}{6} - \sqrt{\frac{-\beta}{8}}), \qquad (6.2.21)$$

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)((p+\frac{3}{2})-\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{-\beta}{8}}-x)((p+1)+\sqrt{\frac{-\beta}{2}}-x), \qquad (6.2.22)$$

$$E = -\hbar\omega(p + \frac{7}{6} - \frac{\alpha}{6} + \sqrt{\frac{-\beta}{8}}). \qquad (6.2.23)$$

To obtain unitary representions we should also impose $\phi(x)$ to be a real function and $\phi(x) > 0$ for $x > 0$. The constraints do not allow all values for α and β so it may happen that only some of the states are physically meaningful. We can have 1, 2 or 3 infinite sequences of energies that correspond to each unitary representation.

For $\beta > 0$ we have two solutions

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x^2+(1-\alpha)x - \frac{\beta}{8} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}), \tag{6.2.24}$$

$$E = \hbar\omega(p + \frac{4}{3} - \frac{\alpha}{3}), \tag{6.2.25}$$

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x^2-(1+\alpha+2p)x+p^2+\alpha p+p-\frac{\beta}{8}+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}), \tag{6.2.26}$$

$$E = -\hbar\omega(p + \frac{2}{3} + \frac{\alpha}{3}). \tag{6.2.27}$$

6.2.2. Case $\epsilon = -1$.

For the case ϵ=-1 we obtain the following expression for the structure function

$$\Phi(x) = -4\omega^2\hbar^4(x+u-(\frac{E}{2\hbar\omega}+\frac{1}{2}))(x+u-(\frac{-E}{2\hbar\omega}+\frac{1}{6}-\frac{\alpha}{3})) \tag{6.2.28}$$

$$(x+u-(\frac{-E}{2\hbar\omega}+\frac{1}{6}(\alpha+4-3i\sqrt{\frac{\beta}{2}})))(x+u-(\frac{-E}{2\hbar\omega}+\frac{1}{6}(\alpha+4+3i\sqrt{\frac{\beta}{2}}))) \quad .$$

Four cases occur for $\beta < 0$

$$u_1 = \frac{-E}{2\hbar\omega} + \frac{1}{6} - \frac{\alpha}{3}, \quad u_2 = \frac{-E}{2\hbar\omega} + \frac{1}{6}(\alpha + 4 + 3\sqrt{\frac{-\beta}{2}}) \tag{6.2.29}$$

$$u_3 = \frac{-E}{2\hbar\omega} + \frac{1}{6}(\alpha + 4 - 3\sqrt{\frac{\beta}{2}}) \quad u_4 = \frac{E}{2\hbar\omega} + \frac{1}{2} \quad .$$

Case 1

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x - \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{-\beta}{8}})(x - \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{-\beta}{8}}), \tag{6.2.30}$$

$$E = \hbar\omega(p + \frac{2}{3} - \frac{\alpha}{3}). \tag{6.2.31}$$

Case 2

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x+\sqrt{\frac{-\beta}{2}})(x+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{-\beta}{8}}), \tag{6.2.32}$$

$$E = \hbar\omega(p+\frac{7}{6}+\frac{\alpha}{6}+\sqrt{\frac{-\beta}{8}}). \tag{6.2.33}$$

Case 3

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x-\sqrt{\frac{-\beta}{2}})(x+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{-\beta}{8}}), \tag{6.2.34}$$

$$E = \hbar\omega(p+\frac{7}{6}+\frac{\alpha}{6}-\sqrt{\frac{-\beta}{8}}). \tag{6.2.35}$$

Case 4

We get three solutions for this case with negative energy

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)((p+\frac{3}{2})+\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{-\beta}{8}}-x)((p+\frac{3}{2})+\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{-\beta}{8}}-x), \tag{6.2.36}$$

$$E = -\hbar\omega(p+\frac{4}{3}+\frac{\alpha}{3}), \tag{6.2.37}$$

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)((p+\frac{1}{2})-\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{-\beta}{8}}-x)((p+1)-\sqrt{\frac{-\beta}{2}}-x), \tag{6.2.38}$$

$$E = -\hbar\omega(p+\frac{5}{6}-\frac{\alpha}{6}-\sqrt{\frac{-\beta}{8}}), \tag{6.2.39}$$

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)((p+\frac{1}{2})-\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{-\beta}{8}}-x)((p+1)+\sqrt{\frac{-\beta}{2}}-x), \tag{6.2.40}$$

$$E = -\hbar\omega(p+\frac{5}{6}-\frac{\alpha}{6}+\sqrt{\frac{-\beta}{8}}). \tag{6.2.41}$$

One interesting aspect of this potential is that we can have three, two or one series of equidistant energy levels.

For $\beta > 0$ we get the following solution

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x^2-(1+\alpha)x-\frac{\beta}{8}+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}), \qquad (6.2.42)$$

$$E = \hbar\omega(p+\frac{2}{3}-\frac{\alpha}{3}), \qquad (6.2.43)$$

$$\Phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x^2-(3+\alpha+2p)x+p^2+\alpha p+3p-\frac{\beta}{8}+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha}{2}+\frac{9}{4}), \quad (6.2.44)$$

$$E = -\hbar\omega(p+\frac{4}{3}+\frac{\alpha}{3}). \qquad (6.2.45)$$

6.3. Third order shape invariance and superintegrable systems

The concept of higher-derivative supersymmetric quantum mechanics (HSQM) was introduced by A.A.Andrianov, M.V.Ioffe and V.P.Spiridonov [49]. HSQM is characterized by polynomial relations between supercharges and the Hamiltonian. Second order derivative supersymmetry was investigated in the Ref.50. We will present in this section results not given in Ref.51 but directly related to the potential given by Eq.(6.1.1) with $\epsilon = 1$. Let us recall some aspects of the particular case of third order shape invariance related to the potential with $\epsilon = -1$ obtained in the Ref.51. In SUSYQM two superpartners are isospectral or almost isospectral and if we know the spectrum and the eigenfunctions of one superpartner we can obtain the spectrum and the eigenfunctions of the other superpartner. A special case occurs when the two superpartners $V_1(x,a_0)$ and $V_2(x,a_0)$ satisfy the relation $V_2(x,a_1) = V_1(x,a_0) + R(a_1)$ where $a_1 = f(a_0)$ and $R(a_1)$ do not depend on x. In this special case we can find directly the energy and the eigenfunctions. The superpartners are called shape invariant potentials (SIP). We consider the following particular case of shape invariance

$$H_1 a^\dagger = a^\dagger (H_1 + 2\lambda) \quad , \qquad (6.3.1)$$

where $a^\dagger$ and a are third order operators. This particular case of shape invariance can be constructed from a first order and second order supersymmetry given by the following interwining relations

$$H_1 q^\dagger = q^\dagger (H_2 + 2\lambda), \quad H_1 M^\dagger = M^\dagger H_2 \quad , \tag{6.3.2}$$

where

$$H_i = P_x^2 + V_i(x) \quad , \tag{6.3.3}$$

$$q^\dagger = \partial + W(x), \quad q = -\partial + W(x) \quad , \tag{6.3.4}$$

$$M^\dagger = \partial^2 - 2h(x)\partial + b(x), \quad M = \partial^2 + 2h(x)\partial + b(x) \quad . \tag{6.3.5}$$

The key element in obtaining the equivalence between Eq.(6.3.1) and Eq.(6.3.2) is to define the following third order operators a and $a^\dagger$ written as products of first order and second order supercharges

$$a^\dagger = q^\dagger M, \quad a = M^\dagger q \quad . \tag{6.3.6}$$

The third order shape invariance of the form given by Eq.(6.3.1) can be investigated using Eq.(6.3.2). The two interwining relations of Eq.(6.3.2) give respectively the following relations

$$V_1 = W'(x) + W^2(x), \quad V_2 = -W'(x) + W^2(x) - 2\lambda \tag{6.3.7}$$

and

$$V_{1,2} = \mp 2h'(x) + h^2(x) + \frac{h''(x)}{2h(x)} - \frac{h'^2(x)}{4h^2(x)} - \frac{d}{4h^2(x)} + \gamma \quad , \tag{6.3.8}$$

$$b(x) = -h'(x) + h^2(x) - \frac{h''(x)}{2h(x)} + \frac{h'^2(x)}{4h^2(x)} + \frac{d}{4h^2(x)} \quad . \tag{6.3.9}$$

Eq.(6.3.7), (6.3.8) and (6.3.9) impose that the potential V_1 should have the form

$$V_1 = -2h'(x) + 4h^2(x) + 4\lambda x h(x) + \lambda^2 x^2 - \lambda \quad , \tag{6.3.10}$$

with

$$h''(x) = \frac{h'^2(x)}{2h(x)} + 6h^3(x) + 8\lambda x h^2(x) + 2(\lambda^2 x^2 - (\lambda + \gamma))h(x) + \frac{d}{2h(x)}, \tag{6.3.11}$$

$$W(x) = W_3(x) = -2h(x) - \lambda x \quad . \tag{6.3.12}$$

As in the case of first order supersymmetry we can define

$$H=\begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \quad Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} \quad Q^{\dagger}=\begin{pmatrix} 0 & M^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{6.3.13}$$

We get the following SUSY-algebra

$$[H,Q]=[H,Q^{\dagger}]=0, \quad \{Q,Q\}=\{Q^{\dagger},Q^{\dagger}\}=0, \quad \{Q,Q^{\dagger}\}=(H-\gamma)^2+d \quad . \tag{6.3.14}$$

Eq.(6.3.11) can be transformed into the equation for the fourth Painlevé transcendent (6.1.4) by the following transformations

$$h(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}f(z), \quad z=\sqrt{\lambda}x, \quad \alpha=1+\frac{\gamma}{\lambda}, \quad \beta=\frac{2d}{\lambda^2}, \quad \lambda=\frac{\omega}{\hbar}, \tag{6.3.15}$$

and we obtain

$$\tilde{V_1}=\frac{\hbar^2}{2}V_1=\frac{\omega^2}{2}x^2-\frac{\omega\hbar}{2}f'(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x)+\frac{\omega\hbar}{2}f^2(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x)+\omega\sqrt{\omega\hbar}xf(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x)-\omega\hbar. \tag{6.3.16}$$

$\tilde{V_1}(x)$ is the x part of the potential in (6.1.1) and coincides with $g_1(x)$ in Eq.(6.1.4) up to a constant. A particular case of third order shape invariance called « reducible »was considered in Ref.51 by imposing further conditions. These conditions are d ≤ 0 and the existence of real functions W_1 and W_2 such that

$$M^{\dagger}=(\partial+W_1(x))(\partial+W_2(x)), \quad W_{1,2}=-h(x)\pm\frac{h'(x)-\sqrt{-d}}{2h(x)} \quad , \tag{6.3.17}$$

(reducible means that $M^{\dagger}$ factorizes into product of two first order operators with real functions). The spectrum was obtained for cases where normalizable zero modes of the annihilation operator exist. Zero modes of the annihilation operator satisfy

$$a\psi_k^{(0)}=0 \quad , \tag{6.3.18}$$

(we use the terminology of HSQM where « zero mode »refers to Eq.(6.3.18) so that zero modes may not have energy $E_0=0$). The energies of zero modes were obtained by imposing the vanishing of the norm of $a\psi_k^{(0)}$ which involves the average of the operator product $a^\dagger a$.

$$a^\dagger a = q^\dagger M M^\dagger q = q^\dagger((H_2-\gamma)^2+d)q = H_1((H_1-\gamma-2\lambda)^2+d) \quad . \tag{6.3.19}$$

The energies of the zero modes are

$$E_1^{(0)} = 0, \quad E_2^{(0)} = \gamma + 2\lambda + \sqrt{-d}, \quad E_3^{(0)} = \gamma + 2\lambda - \sqrt{-d} \quad . \tag{6.3.20}$$

The corresponding eigenfunctions $\psi_k^{(0)}$ can be calculated explicitly and are

$$\psi_1^0(x) = e^{\int^x W_3(x')dx'} \quad , \tag{6.3.21}$$

$$\psi_2^0(x) = (W_2(x) - W_3(x))e^{-\int^x W_2(x')dx'} \quad , \tag{6.3.22}$$

$$\psi_3^0(x) = (2\sqrt{-d} + (W_2(x) - W_3(x))(W_1(x) + W_2(x)))e^{-\int^x W_1(x')dx'} \quad . \tag{6.3.23}$$

The creation operator can also have zero modes $\phi_k^{(0)}$ which correspond to a possible truncation of the sequence of excited levels. They were obtained by considering the following product

$$aa^\dagger = (H_1 + 2\lambda)((H_1-\gamma)^2+d) \quad . \tag{6.3.24}$$

The energies of the zero modes are

$$E_1^{(0)} = \gamma - \sqrt{-d}, \quad E_2^{(0)} = \gamma + \sqrt{-d}, \quad E_3^{(0)} = -2\lambda \quad , \tag{6.3.25}$$

with the corresponding eigenfunctions

$$\phi_1^0(x) = e^{\int^x W_1(x')dx'} \quad , \tag{6.3.26}$$

$$\phi_2^0(x) = (W_1(x) + W_2(x))e^{\int^x W_2(x')dx'} \quad , \tag{6.3.27}$$

$$\phi_3^0(x) = (\gamma + 2\lambda + \sqrt{-d} + (W_1(x) + W_2(x))(W_2(x) - W_3(x)))e^{-\int^x W_3(x')dx'} \quad . \tag{6.3.28}$$

For non singular potentials it is not possible to have the negative energy $E_3^{(0)}$ and the total number of zero modes of the annihilation and creation operator cannot be more than three because of the asymptotics of the eigenfunctions. We can have

three, two or one infinite sequence of levels. These results coincide with those obtained as from the analysis of Fock type representations of the cubic algebra of the superintegrable potential. When we apply the creation operator $a^\dagger$ on zero modes we create eigenfunctions with 2λ more energy. These energies are corroborated (when we add a harmonic oscillator in the y direction) by those obtained using the cubic algebra and given by Eq.(6.2.31), Eq.(6.2.33) and Eq.(6.2.35).
When a potential allowes only one infinite sequence of energies, this potential may also allow a singlet state or a doublet of states

$$a^+\psi(x) = a^-\psi(x) = 0, \quad (a^+)^2\psi(x) = a^-\psi(x) = 0 \quad . \tag{6.3.29}$$

From an algebraic point of view these states correspond to trivial irreducible representations. Such a case was discussed in Ref. [19] for the potential $V = \hbar^2(\frac{x^2+y^2}{8a^4} + \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2})$. This potential is a special case of the potential given by the Eq(6.1.1). The observed singlet state can now be naturally understood as a phenomenon of third order shape invariance.
All the results we presented apply to our potential for $\epsilon = -1$. We will present here the results that will be applicable to the case $\epsilon = 1$. We follow the same approach as in Ref.51 and we consider the following potential

$$V_2 = 2h'(x) + 4h^2(x) + 4\lambda x h(x) + \lambda^2 x^2 - \lambda \quad . \tag{6.3.30}$$

The Eq.(6.3.9), Eq.(6.3.11) and Eq.(6.3.12) remain the same. We can define as for V_1 in Eq.(6.3.16) a potential $\tilde{V_2}$ using the transformations of Eq.(6.3.15). The Hamiltonian H_2 of the form given by Eq.(6.3.3) with the potential given by Eq.(6.3.30) satisfies

$$H_2 a^\dagger = a^\dagger(H_2 + 2\lambda) \quad . \tag{6.3.31}$$

when we postulate

$$a^\dagger = M q^\dagger, \quad a = q M^\dagger \quad . \tag{6.3.32}$$

We have the following product

$$a^\dagger a = H_2((H_2-\gamma)^2+d), \quad aa^\dagger = (H_2+2\lambda)((H_2+2\lambda-\gamma)^2+d) \quad . \quad (6.3.33)$$

The energies of the zero modes of the creation and annihilation operator are obtained by imposing the vanishing of their norm. This involves the average of the operator product $a^\dagger a$ and $aa^\dagger$ given by Eq.(6.3.33). The eigenfunctions of the zero modes are obtained directly by solving $a\psi_k^{(0)}=0$ and $a^\dagger\phi_k^{(0)}=0$. The energies of zero modes of the annihilation operator are

$$E_1^{(0)}=0, \quad E_2^{(0)}=\gamma-\sqrt{-d}, \quad E_3^{(0)}=\gamma+\sqrt{-d} \quad , \quad (6.3.34)$$

with the corresponding eigenfunctions

$$\psi_1^0(x)=(\gamma-\sqrt{-d}+(W_1(x)+W_2(x))(W_1(x)-W_3(x)))e^{\int^x W_3(x')dx'} \quad , \quad (6.3.35)$$

$$\psi_2^0(x)=(W_1(x)+W_2(x))e^{-\int^x W_1(x')dx'} \quad , \quad (6.3.36)$$

$$\psi_3^0(x)=e^{-\int^x W_2(x')dx'} \quad . \quad (6.3.37)$$

The energies of zero modes of the creation operator are

$$E_1^{(0)}=-2\lambda, \quad E_2^{(0)}=\gamma-2\lambda-\sqrt{-d}, \quad E_3^{(0)}=\gamma-2\lambda+\sqrt{-d} \quad , \quad (6.3.38)$$

with the corresponding eigenfunctions

$$\phi_1^0(x)=e^{-\int^x W_3(x')dx'} \quad , \quad (6.3.39)$$

$$\phi_2^0(x)=(W_1(x)-W_3(x))e^{\int^x W_1(x')dx'} \quad , \quad (6.3.40)$$

$$\phi_3^0(x)=(-2\sqrt{-d}+(W_1(x)-W_3(x))(W_1(x)+W_2(x)))e^{\int^x W_2(x')dx'} \quad . \quad (6.3.41)$$

Again the total number of zero modes of the annihilation and creation operator cannot be more than three because of the asymptotics of the eigenfunctions. We can have three, two or one infinite sequence of levels. When we apply the creation operator $a^\dagger$ on zero modes we create eigenfunctions with 2λ more energy. These energies are corroborated (when we add a harmonic oscillator in the y direction) by those obtained by the cubic algebra and given by Eq.(6.2.13), Eq.(6.2.15) and Eq.(6.2.17). When a potential possess only one infinite sequence of energies, this potential may also possess a singlet state or a doublet states.

We will discuss the irreducible case that appears when $d > 0$. For $V_1(x)$ we get

$$E_1^{(0)} = 0, \quad \psi_0^0(x) = e^{\int^x W_3(x')dx'}. \tag{6.3.42}$$

For $V_2(x)$ we get

$$E_1^{(0)} = 0, \quad \psi_0^0(x) = (\gamma - \sqrt{d} + (W_1(x) + W_2(x))(W_1(x) - W_3(x)))e^{\int^x W_3(x')dx'}. \tag{6.3.43}$$

and W_1 and W_2 are not real functions.

6.4. Special cases

The fourth Painlevé transcendent satisfying Eq.(6.1.6) depends on two parameters and special solutions in terms of rational or classical special functions exist [48]. In this section, we will give the unitary representations, the corresponding energy spectra and the eigenfunctions for some special cases.

6.4.1. Case $\alpha = 5$, $\beta = -8$, $f(z) = \frac{4z(2z^2-1)(2z^2+3)}{(2z^2+1)(4z^4+3)}$ and $\epsilon = 1$.

We have with Eq.(6.1.4) and (6.1.5)

$$V(x,y) = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \frac{8\hbar^3\omega}{(2\omega x^2 + \hbar)^2} + \frac{4\hbar^2\omega}{(2\omega x^2 + \hbar)} + \frac{2\hbar\omega}{3}. \tag{6.4.1}$$

From the cubic algebra we get two unitary representations. The first unitary representation is given by Eq.(6.2.14) with the corresponding energy given by Eq.(6.2.15)

$$\phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p + 1 - x)(x + 3)(x + 2), \quad E = \hbar\omega(p + \frac{8}{3}), \tag{6.4.2}$$

The second solution is given by Eq(6.2.12) or Eq.(6.2.20) with the corresponding energy spectrum

$$\phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x-3)(x-1), \quad E = \hbar\omega(p-\frac{1}{3}). \tag{6.4.3}$$

This representation is valid only for p=0.

We will also treat this systems using the results on supersymmetry. The eigenfunctions for the x part consist of an infinite sequence $\psi_n(x)$ starting from $psi_3^0(x)$ of Eq.(6.3.37) and a singlet state $\chi(x)$ given by Eq.(6.3.35) and (6.3.40)

$$\psi_n(x) = N_n(a^\dagger)^n e^{\frac{-\omega x^2}{2\hbar}} \frac{x(3\hbar + 2\omega x^2)}{(\hbar + 2\omega x^2)}, \chi(x) = C_0 \frac{e^{\frac{-\omega x^2}{2\hbar}}}{\hbar + 2\omega x^2} \tag{6.4.4}$$

$$a\chi(x) = 0, \quad a^\dagger\chi(x) = 0 \quad . \tag{6.4.5}$$

The creation and annihilation operator are given by Eq.(6.3.32) with the following expressions for W_1, W_2 and W_3

$$W_1 = \frac{-(-\hbar + 2\omega x^2)(9\hbar^3 + 27\hbar^2\omega x^2 + 12\hbar\omega^2 x^4 + 4\omega^3 x^6)}{\hbar x(3\hbar + 2\omega x^2)(3\hbar^2 + 4\omega^2 x^4)} \quad , \tag{6.4.6}$$

$$W_2 = \frac{-(\hbar - 2\omega x^2)(3\hbar^2 + 3\hbar\omega x^2 + 2\omega^2 x^4)}{\hbar x(3\hbar^2 + 8\hbar\omega x^2 + 4\omega^2 x^4)} \quad , \tag{6.4.7}$$

$$W_3 = \frac{-\omega x(-9\hbar^3 + 22\hbar^2\omega x^2 + 20\hbar\omega^2 x^4 + 8\omega^3 x^6)}{\hbar(\hbar + 2\omega x^2)(3\hbar^2 + 4\omega^2 x^4)} \quad . \tag{6.4.8}$$

With the eigenfunctions for the y part of the Hamiltonian and the formula for the energies given by Eq.(6.3.34) we obtain the two following series of solutions

$$\psi_{n,k} = \psi_n(x) e^{-\frac{\omega y^2}{2\hbar}} H_k(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} y), \quad E = \hbar\omega(n + k + \frac{8}{3}) \quad , \tag{6.4.9}$$

$$\phi_m = \chi(x) e^{-\frac{\omega y^2}{2\hbar}} H_m(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} y), \quad E_m = \hbar\omega(m - \frac{1}{3}). \tag{6.4.10}$$

6.4.2. Case $\alpha = 5$, $\beta = -8$, $f(z) = \frac{4z(2z^2-1)(2z^2+3)}{(2z^2+1)(4z^4+3)}$ and $\epsilon = -1$.

We have with Eq.(6.1.4) and (6.1.5)

$$V(x,y) = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) - \frac{192\hbar^4\omega^2x^2}{(4\omega^2x^4+3\hbar^2)^2} + \frac{16\hbar^2\omega^2x^2}{4\omega^2x^4+3\hbar^2}. \tag{6.4.11}$$

From the cubic algebra we obtain three unitary representations. The first unitary representation is given by Eq.(6.2.32) with the corresponding energy spectrum Eq.(6.2.33)

$$\phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x+4)(x+2), \quad E = \hbar\omega(p+3), \tag{6.4.12}$$

The second solution is given by Eq(6.2.38) with the corresponding energy spectrum given by Eq.(6.2.39)

$$\phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(p-3-x)(p-1-x), \quad E = -\hbar\omega(p-1). \tag{6.4.13}$$

This representation is valid only for p=0,1.

The third solution is given by Eq(6.2.30) with the corresponding energy spectrum given by Eq.(6.2.31)

$$\phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x-3)(x-2), \quad E = \hbar\omega(p-1). \tag{6.4.14}$$

This representation is valid only for p=0,1.

We investigate this system using the results on supersymmetry. The eigenfunctions for the x part consist of an infinite sequence $\psi_n(x)$ starting from $\psi_0^2(x)$ given by Eq.(6.3.22) and doublet states $\chi_1(x)$ and $\chi_2(x)$ given by Eq.(6.3.22), (6.3.21) and (6.3.26)

$$\psi_n(x) = N_n(a^\dagger)^n e^{\frac{-\omega x^2}{2\hbar}} \frac{(-9\hbar^3 + 18\hbar^2\omega x^2 + 12\hbar\omega^2x^4 + 8\omega^3x^6)}{(3\hbar^2+4\omega^2x^4)}, \tag{6.4.15}$$

$$\chi_1(x) = C_1 e^{\frac{-\omega x^2}{2\hbar}} \frac{(\hbar + 2\omega x^2)}{(3\hbar^2+4\omega^2x^4)}, \quad \chi_2(x) = C_2 e^{\frac{-\omega x^2}{2\hbar}} \frac{x(3\hbar + 2\omega x^2)}{(3\hbar^2+4\omega^2x^4)}. \tag{6.4.16}$$

$$a\chi_1(x) = 0, \quad a^\dagger\chi_1(x) = \chi_2(x), \quad a^\dagger\chi_2(x) = 0 \quad . \tag{6.4.17}$$

The creation and annihilation operators are given by Eq.(6.3.6) with W_1, W_2 and W_3 as in Eq.(6.4.6), Eq.(6.4.7) and Eq.(6.4.8).

With the eigenfunctions in the y part and the formula for the energies given by Eq.6.3.20) we obtain the three following kinds of solutions

$$\psi_{n,k} = \phi_n(x)e^{-\frac{\omega y^2}{2\hbar}}H_k(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}y), \quad E = \hbar\omega(n+k+3) \quad , \tag{6.4.18}$$

$$\phi_{m_1} = \chi_1(x)e^{-\frac{\omega y^2}{2\hbar}}H_{m_1}(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}y), \quad E_{m_1} = \hbar\omega(m_1-1) \quad , \tag{6.4.19}$$

$$\phi_{m_2} = \chi_2(x)e^{-\frac{\omega y^2}{2\hbar}}H_{m_2}(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}y), \quad E_{m_2} = \hbar\omega m_2. \tag{6.4.20}$$

6.4.3. Case $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{2}{9}$, $f(z) = -\frac{2}{3}z$ and $\epsilon = 1$.

We have

$$V(x,y) = \frac{\omega^2}{2}(\frac{1}{9}x^2 + y^2) \tag{6.4.21}$$

From the cubic algebra we get three cases with unitary representations and using Eq.(6.2.12) to Eq.(6.2.17) we have

$$\phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x+\frac{1}{3})(x+\frac{2}{3}), \quad E = \hbar\omega(p+\frac{4}{3}), \tag{6.4.22}$$

$$\phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{3}), \quad E = \hbar\omega(p+1), \tag{6.4.23}$$

$$\phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x-\frac{2}{3})(x-\frac{1}{3}), \quad E = \hbar\omega(p+\frac{2}{3}). \tag{6.4.24}$$

We apply the results coming from supersymmetry. we get the following known eigenfunctions from Eq.(6.3.35), Eq.(6.3.37) and E.(6.3.36) respectively and the corresponding energy with the Eq.(6.3.34)

$$\psi_{n_1,k_1} = N_{n_1k_1}(a^\dagger)^{n_1}e^{\frac{-\omega x^2}{6\hbar}}(-3\hbar + 2\omega x^2)e^{-\frac{\omega y^2}{2\hbar}}H_{k_1}(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}y), \tag{6.4.25}$$

$$E_1 = \hbar\omega(n_1 + k_1 + \frac{4}{3}), \tag{6.4.26}$$

$$\psi_{n_2,k_2} = N_{n_2k_2}(a^\dagger)^{n_2}e^{\frac{-\omega x^2}{6\hbar}}xe^{-\frac{\omega y^2}{2\hbar}}H_{k_2}(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}y), \tag{6.4.27}$$

$$E_2 = \hbar\omega(n_2 + k_2 + 1). \tag{6.4.28}$$

$$\psi_{n_3,k_3} = N_{n_3k_3}(a^\dagger)^{n_3} e^{\frac{-\omega x^2}{6\hbar}} e^{-\frac{\omega y^2}{2\hbar}} H_{k_3}(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}y), \tag{6.4.29}$$

$$E_2 = \hbar\omega(n_2 + k_2 + \frac{2}{3}), \tag{6.4.30}$$

The creation and annihilation operator are given by Eq.(6.3.32) with the following expression for W_1, W_2 and W_3

$$W_1 = \frac{1}{x} + \frac{\omega x}{3\hbar}, \quad W_2 = -\frac{1}{x} + \frac{\omega x}{3\hbar}, \quad W_3 = -\frac{\omega x}{3\hbar}. \tag{6.4.31}$$

6.4.4. $\alpha = -1, \beta = -\frac{32}{9}$, $f(z) = -\frac{2z}{3} - \frac{2z^2-3}{z(2z^2+3)}$ **and** $\epsilon = 1$.

We have

$$V(x,y) = \frac{\omega^2}{2}(\frac{1}{9}x^2 + y^2) - \frac{24\hbar^3\omega}{(2\omega x^2 + 3\hbar)^2} + \frac{4\hbar^2\omega}{(2\omega x^2 + 3\hbar)} \quad . \tag{6.4.32}$$

From the cubic algebra we get the three cases with unitary representations from Eq.(6.2.12) to Eq.(6.2.17)

$$\phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x+\frac{1}{3})(x+\frac{5}{3}), \quad E = \hbar\omega(p+\frac{5}{3}), \tag{6.4.33}$$

$$\phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x-\frac{1}{3})(x+\frac{4}{3}), \quad E = \hbar\omega(p+\frac{4}{3}), \tag{6.4.34}$$

$$\phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x-\frac{5}{3})(x-\frac{4}{3}), \quad E = \hbar\omega(p). \tag{6.4.35}$$

From the supersymmery we obtain the following eigenfunctions from Eq.(6.3.35), Eq.(6.3.36) and E.(6.3.37) respectively and the energy with the Eq.(6.3.34)

$$\psi_{n_1,k_1} = N_{n_1k_1}(a^\dagger)^{n_1} e^{\frac{-\omega x^2}{6\hbar}} x\frac{(-45\hbar^2 + 4\omega^2x^4)}{(3\hbar + 2\omega x^2)} e^{-\frac{\omega y^2}{2\hbar}} H_{k_1}(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}y), \tag{6.4.36}$$

$$E_1 = \hbar\omega(n_1 + k_1 + \frac{5}{3}), \tag{6.4.37}$$

$$\psi_{n_2,k_2} = N_{n_2k_2}(a^\dagger)^{n_2} e^{\frac{-\omega x^2}{6\hbar}} \frac{(9\hbar^2 - 12\hbar\omega x^2 - 4\omega^2x^4)}{(3\hbar + 2\omega x^2)} e^{-\frac{\omega y^2}{2\hbar}} H_{k_2}(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}y), \tag{6.4.38}$$

$$E_2 = \hbar\omega(n_2 + k_2 + \frac{4}{3}). \tag{6.4.39}$$

$$\psi_{n_3,k_3} = N_{n_3 k_3}(a^\dagger)^{n_3} \frac{e^{\frac{-\omega x^2}{6\hbar}}}{(3\hbar + 2\omega x^2)} e^{-\frac{\omega y^2}{2\hbar}} H_{k_3}(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} y). \tag{6.4.40}$$

$$E_3 = \hbar\omega(n_3 + k_3), \tag{6.4.41}$$

The creation and annihilation operators are given by Eq.(6.3.32) with the following expressions for W_1, W_2 and W_3

$$W_1 = \frac{-27\hbar^3 + 27\hbar^2\omega x^2 + 48\hbar\omega^2 x^4 + 4\omega^3 x^6}{27\hbar^3 x - 36\hbar^2\omega x^3 - 12\hbar\omega^2 x^5}, \tag{6.4.42}$$

$$W_2 = \frac{351\hbar^3\omega x + 126\hbar^2\omega^2 x^3 + 12\hbar\omega^3 x^5 - 8\omega^4 x^7}{81\hbar^4 - 54\hbar^3\omega x^2 - 106\hbar^2\omega^2 x^4 - 24\hbar\omega^3 x^6}, \tag{6.4.43}$$

$$W_3 = \frac{-9\hbar^2 - 3\hbar\omega x^2 + 2\omega^2 x^4}{9\hbar^2 x + 6\hbar\omega x^3}. \tag{6.4.44}$$

6.4.5. Case $\alpha = 0$, $\beta = -2$, $f(z) = -2z - \Psi(z)$ and $\epsilon = 1$.

We have

$$\Psi(z) = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}, \quad \psi(z) = 1 - tE_c(z) \quad . \tag{6.4.45}$$

$E_c(z)$ is the complementary error function and is given by

$$E_c(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt \tag{6.4.46}$$

We have with Eq.(6.1.4) and (6.1.5)

$$V(x,y) = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) - \frac{2}{3}\hbar\omega + \frac{4e^{-\frac{2\omega x^2}{\hbar}} t\hbar\omega}{\pi(1 - tE_c(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x))^2} + \frac{4e^{-\frac{\omega x^2}{\hbar}} + \omega\sqrt{\hbar\omega}x}{\pi(1 - tE_c(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x))}. \tag{6.4.47}$$

The cubic algebra provides two unitary representations. The first unitary representation is given by the Eq.(6.2.12) with the corresponding energy given by Eq.(6.2.13). The Eq.(6.2.14) and (6.2.15) give the same unitary representation and energy spectrum and we have

$$\phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p + 1 - x)x(x + 1), \quad E = \hbar\omega(p + \frac{4}{3}), \tag{6.4.48}$$

The second solution is given by Eq(6.2.16) with the corresponding energy spectrum given by Eq.(6.2.17)

$$\phi(x) = 4\hbar^4\omega^2 x(p+1-x)(x-1)^2, \quad E = \hbar\omega(p+\frac{1}{3}). \tag{6.4.49}$$

This unitary representation is valid for p=0.

We also use supersymmetry to treat this system. The eigenfunctions for the x part consist of an infinite sequence $\psi_n(x)$ starting from ψ_3^0 given by Eq.(6.3.37) and a singlet state $\chi(x)$ given by Eq.(6.3.36) and (6.3.39)

$$\psi_n(x) = N_n(a^\dagger)^n e^{\frac{-3\omega x^2}{2\hbar}} \frac{(-t\sqrt{\hbar\omega} - e^{\frac{\omega x^2}{\hbar}}\sqrt{\pi}\omega x + e^{\frac{\omega x^2}{\hbar}}\sqrt{\pi}t\omega x E_c(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x))}{\omega(-1+tE_c(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x))}, \tag{6.4.50}$$

$$\chi(x) = C_0 \frac{e^{\frac{-\omega x^2}{2\hbar}}}{\sqrt{\pi}\hbar(1-tE_c(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x))} \quad ; \tag{6.4.51}$$

$$a\chi(x) = 0, \quad a^\dagger\chi(x) = 0 \quad . \tag{6.4.52}$$

The creation and annihilation operators are given by Eq.(6.3.32) with the following expressions for W_1, W_2 and W_3

$$W_1 = \frac{(-t\omega x - e^{\frac{\omega x^2}{\hbar}}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}(\hbar+\omega x^2) + e^{\frac{\omega x^2}{\hbar}}\sqrt{\pi}t\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}(\hbar+\omega x^2)E_c(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x))}{\hbar(-t - e^{\frac{\omega x^2}{\hbar}}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x + e^{\frac{\omega x^2}{\hbar}}\sqrt{\pi} + \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}xE_c(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x))} \quad , \tag{6.4.53}$$

$$W_2 = \frac{A}{B} \quad , \tag{6.4.54}$$

$$A = e^{-\frac{\omega x^2}{\hbar}}(2t^2\sqrt{\omega\hbar} + 3e^{\frac{\omega x^2}{\hbar}}\sqrt{\pi}t\omega x - e^{\frac{2\omega x^2}{\hbar}}\pi\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}(h-\omega x^2) + \tag{6.4.55}$$

$$(-3e^{\frac{\omega x^2}{\hbar}}\sqrt{\pi}t^2\omega x + 2e^{\frac{2\omega x^2}{\hbar}}\pi t\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}(\hbar-\omega x^2))E_c(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x)$$

$$-e^{\frac{2\omega x^2}{\hbar}}\pi t^2\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}(\hbar-\omega x^2)(E_c(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x))^2),$$

$$B = \hbar\sqrt{\pi}(-1+tE_c(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x))(-t - e^{\frac{\omega x^2}{\hbar}}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x + e^{\frac{\omega x^2}{\hbar}}\sqrt{\pi}t\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}xE_c(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x)), \tag{6.4.56}$$

$$W_3 = \frac{\omega x}{\hbar} + \frac{2e^{-\frac{\omega x^2}{\hbar}} + \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}}{\sqrt{\pi}(1-tE_c(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x))} \quad . \tag{6.4.57}$$

With the eigenfunctions for the y part of the Hamiltonian and the formula for the energies given by Eq.(6.3.34) we obtain the two following families of solutions

$$\psi_{n,k} = \psi_n(x) e^{-\frac{\omega y^2}{2\hbar}} H_k(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} y), \quad E = \hbar\omega(n + k + \frac{4}{3}) \quad , \tag{6.4.58}$$

$$\phi_m = \chi(x) e^{-\frac{\omega y^2}{2\hbar}} H_m(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} y), \quad E_m = \hbar\omega(m + \frac{1}{3}). \tag{6.4.59}$$

6.4.6. Case $\alpha = 0$, $\beta = -2$, $f(z) = -2z - \Psi(z)$ and $\epsilon = -1$.

This case give the harmonic oscillator. The zero mode is given by Eq.(6.3.22) is the well known ground state of the harmonic oscillator. There is other special solutions in terms of the complementary error function exist.
Many special solutions of the fourth Painlevé equation will give us singular Hamiltonians. These potentials can be regularized in several manners [19,56,57,58].

6.5. Conclusion

The main results of this article are that we have constructed the cubic algebra, Fock type presentations and the corresponding energy spectrum for the potential given by Eq.(6.1.4), (6.1.5). Other superintegrable potentials written in term of Painlevé transcendents are known [16] namely :

$$V_1 = \hbar^2(\omega_1^2 P_I(\omega_1 x) + \omega_2^2 P_I(\omega_2 y)) \tag{6.5.1}$$

$$V_2 = ay + \hbar^2\omega^2 P_I(\omega x) \tag{6.5.2}$$

$$V_3 = bx + ay + (2\hbar b)^{\frac{2}{3}} P_{II}^2((\frac{2b}{\hbar^2})^{\frac{1}{3}} x, 0) \tag{6.5.3}$$

$$V_4 = ay + (2\hbar^2 b^2)^{\frac{1}{3}} (P'_{II}((\frac{-4b}{\hbar^2})^{\frac{1}{3}} x, k) + P_{II}^2((\frac{-4b}{\hbar^2})^{\frac{1}{3}} x), k). \tag{6.5.4}$$

These potentials together with that in Eq.(6.1.4) and Eq.(6.1.5) were also obtained as one dimensional potentials in the context of higher and conditional symmetries by W.I.Fushchych and A.G.Nikitin [46]. For these four superintegrable potentials the simplest underlying structure of the type (6.2.5) is actually a finite dimensional Lie algebra that does not allow us to find the energy spectrum. Let us present these algebras :

For V_1 we have :

$$[A, B] \equiv C = -i\hbar^5 \omega_1^5 \omega_2^5, \quad [A, C] = 0, \quad [B, C] = 0 \quad . \tag{6.5.5}$$

For V_2 we have :

$$[A, B] \equiv C = -i\hbar^5 \omega^5, \quad [A, C] = 0, \quad [B, C] = 0 \quad . \tag{6.5.6}$$

For V_3 and V_4 we have :

$$[A, B] \equiv C = 4abi\hbar(H + \frac{1}{2}A), \quad [A, C] = 0, \quad [B, C] = 8a^2b^2\hbar^2(H + \frac{1}{2}A) \quad . \tag{6.5.7}$$

These algebras coincide with the classical Poisson algebras presented earlier [17]. In these four cases we have a triplet of commuting operators. The x part of the potential V_4 was also obtained in the context of supersymmetric quantum mechanics [55]. The methods of this article are not directly applicable in that case, but it may be possible to generalize them.

The question of how these aspects of SUSYQM, shape invariance and superintegrability are related is interesting and will require more study. Supersymmetry could also be a tool for the classification of superintegrable potentials. Higher order supersymmetry could be a suitable approach to treat these potentials. The search for superintegrable systems with higher order integrals of motion is thus closely related to the subject of polynomial algebras and higher order supersymmetric quantum mechanics.

The search for a grand unifying theory in particle physics is an important problem of comtemporary physics. One model that is envisaged as a candidate is string theory. The x part of the potential given by Eq.(6.1.1) appears also in the context of string theory [59] where supersymmetry is used as a method for constructing exact solutions. A more recent article [60] discusses how supersymmetric quantum mechanics can be used to construct solutions in string theory.

Acknowledgments The research of I.M. is supported by a doctoral research scholarship from FQRNT of Quebec. The author thanks P.Winternitz for very helpful comments and discussions. This article was written in part while he was visiting the Universita di Roma Tre. He thanks D.Levi for his hospitality. He thanks the University of Montreal and the Ministry of Education of Quebec for the PBCSE travel awards.

6.6. References

[1] V.Fock, Z.Phys. 98, 145-154 (1935).

[2] V.Bargmann, Z.Phys. 99, 576-582 (1936).

[3] J.M.Jauch and E.L.Hill, Phys.Rev. 57, 641-645 (1940).

[4] M.Moshinsky and Yu.F.Smirnov, The Harmonic Oscillator In Modern Physics, (Harwood, Amsterdam, 1966).

[5] J.Fris, V.Mandrosov, Ya.A.Smorodinsky, M.Uhlir and P.Winternitz, Phys.Lett. 16, 354-356 (1965).

[6] P.Winternitz, Ya.A.Smorodinsky, M.Uhlir and I.Fris, Yad.Fiz. 4, 625-635 (1966). (English translation in Sov. J.Nucl.Phys. 4, 444-450 (1967)).

[7] A.Makarov, Kh. Valiev, Ya.A.Smorodinsky and P.Winternitz, Nuovo Cim. A52, 1061-1084 (1967).

[8] N.W.Evans, Phys.Rev. A41, 5666-5676 (1990), J.Math.Phys. 32, 3369-3375 (1991).

[9] E.G.Kalnins, J.M.Kress, W.Miller Jr and P.Winternitz, J.Math.Phys. 44(12) 5811-5848 (2003).

[10] E.G.Kalnins, W.Miller Jr and G.S.Pogosyan, J.Math.Phys. A34, 4705-4720 (2001).

[11] E.G.Kalnins, J.M.Kress and W.Miller Jr, J.Math.Phys. 46, 053509 (2005), 46, 053510 (2005), 46, 103507 (2005), 47, 043514 (2006), 47, 043514 (2006).

[12] E.G.Kalnins, W.Miller Jr and G.S.Pogosyan, J.Math.Phys. 47, 033502.1-30

(2006), 48, 023503.1-20 (2007).

[13] J.Drach, C.R.Acad.Sci.III, 200, 22 (1935), 200, 599 (1935).

[14] J.Hietarinta, Phys.Lett.A, 246, 1, 97 (1998).

[15] S.Gravel and P.Winternitz, J.Math.Phys. 43(12), 5902 (2002).

[16] S.Gravel, J.Math.Phys. 45(3), 1003-1019 (2004).

[17] I.Marquette and P.Winternitz, J.Math.Phys. 48(1) 012902 (2007).

[18] I.Marquette and P.Winternitz, J. Phys. A : Math. Theor. 41, 304031 (2008).

[19] I.Marquette, J.Math.Phys. 50, 012101 (2009).

[20] P.Letourneau and L.Vinet, Ann.Phys. 243, 144 (1995).

[21] Ya.I Granovskii, A.S.Zhedanov and I.M.Lutzenko , J. Phys. A24, 3887-3894 (1991).

[22] D.Bonatsos, C.Daskaloyannis and K.Kokkotas, Phys.Rev. A48, R3407-R3410 (1993).

[23] D.Bonatsos, C.Daskaloyannis and K.Kokkotas, Phys. Rev.A 50, 3700-3709 (1994).

[24] P.Letourneau and L.Vinet, Ann.Phys. 243, 144 (1995).

[25] C.Daskaloyannis, J.Math.Phys. 42, 1100 (2001).

[26] C.Daskaloyannis, Generalized deformed oscillator and nonlinear algebras, J.Phys.A : Math.Gen 24, L789-L794 (1991).

[27] E.G.Kalnins, W.Miller and S.Post, SIGMA 4, 008 (2008).

[28] C.Quesne, SIGMA 3, 067 (2007).

[29] V.Sunilkumar, arXiv :math-ph/0203047 (2002).

[30] V.Sunilkumar, B.A.Bambah and R.Jagannathan, J.Phys. A :Math.Gen. 34, 8583 (2001).

[31] V.Sunilkumar, B.A.Bambah and R.Jagannathan, mod. Phys. Lett. A17, 1559 (2002).

[32] E.Witten, Nucl.Phys. B188, 513 (1981).

[33] G.Darboux, C.R.Acad.Sci. Paris, 94, 1459 (1882)

[34] T.F.Moutard, C.R.Acad.Sci. Paris, 80, 729 (1875), J.de L'école Politech., 45, 1 (1879).

[35] E.Schrodinger, Proc.Roy. Irish Acad., 46A, 9 (1940), 47A, 53 (1941).

[36] L.Infeld and T.E.Hull, Rev.Mod.Phys., 23, 21 (1951).

[37] G.Junker, Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics, Springer, New York, (1995).

[38] M.S.Plyushchay, Annals Phys. (N.Y.) 245, 339 (1996)

[39] M.Plyushchay, Int.J.Mod.Phys. A15, 3679 (2000),

[40] F.Correa and M.Plyushchay, Annals Phys.322, 2493 (2007).

[41] L.Gendenshtein, JETP Lett., 38, 356 (1983).

[42] E.L.Ince, Ordinary Differential Equations (Dover, New York, 1944).

[43] M.J.Ablowitz and P.A.Clarkson, Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, (Cambridge Univ.Press, 1991).

[44] A.P.Veselov and A.Shabat,Funkt.Analiz.Prilozh 27(2), 1-21 (1993).

[45] A.P.Veselov, J.Phys. A34, 3511 (2001).

[46] V.Spiridonov, Phys.Rev.A52, 3 (1995).

[47] W.I.Fushchych and A.G.Nikitin, J.Math.Phys. V38 N11, 5944 (1997).

[48] V.Gromak, I.Laine and S.Shimomura, Painlevé Differential Equations in the Complex Plane, Walter de Gruyter (2002).

[49] A.Andrianov, M.Ioffe and V.P.Spiridonov, Phys.Lett. A174, 273 (1993).

[50] A.Andrianov, F.Cannata, J.P.Dedonder and M.Ioffe, Int.Mod.Phys.A10, 2683-2702 (1995).

[51] A.Andrianov, F.Cannata, M.Ioffe and D.Nishnianidze, Phys.Lett.A, 266,341-349 (2000).

[52] M.V.Ioffe and D.N.Mishnianidze, PhysLett.A327,425 (2004)

[53] A.A.Andrianov and A.V.Sokolov, Jour.Math.Sci, 143, 1, 2702 (2007).

[54] J.Mateo and J.Negro, J.Phys. A :Math. Theor. 41 045204 (2008).

[55] F.Cannata, M.Ioffe, G.Junker and D.Nishnianidze, J.Phys.A.Math.Gen. 32, 3583 (1999)

[56] I.F.Marquez, J.Negro and L.M.Nieto, J.Phys. A :Math. Gen. 31, 4115 (1998).

[57] A.Das and S.A.Pernice, Nucl.Phys.B 561, 357 (1999).

[58] M.Znojil, Nucl.Phys.B662,554 (2003), M.Znojil, Phys.Lett. A 259, 220 (1999).

[59] A.V.Yurov and V.A.Yurov, Phys.Rev.D72, 026003 (2005).

[60] M.R.Setare, J.Sadeghi and A.R.Amani, Phys.Lett B 660, 299 (2008).

CONCLUSION

Nous avons vu comment diverses symétries et structures algébriques pouvaient être reliées entre elles, mais surtout comment celles-ci peuvent permettre de faire l'étude de systèmes pour lesquels les méthodes, que l'on pourrait qualifier de classique, seraient très difficiles à appliquer.

Nous avons exploré dans cette thèse des systèmes classiques et quantiques qui possédaient des intégrales du mouvement d'ordre deux et d'ordre trois. Dans le cas classique, nous avons étudié l'algèbre de Poisson cubique la plus générale que nous pouvons former pour de tels systèmes. Nous avons ensuite appliqué les résultats obtenus aux 8 potentiels classiques.

Nous avons montré comment dans le cas des systèmes reductibles, c'est-à-dire ceux pour lesquels l'intégrale d'ordre trois est le commutateur de deux intégrales d'ordre 2, l'algèbre cubique pouvait être construite directement à partir d'une algèbre de Lie ou quadratique. Ces résultats algébriques en mécanique classique nous ont servi de repère pour faire l'étude du cas quantique. Ces algèbres peuvent également nous permettre de voir comment, pour l'équivalent quantique d'un système classique, l'algèbre de Poisson est déformée.

Les trajectoires du mouvement peuvent être obtenues par la résolution de l'équation de Newton, des équations d'Hamilton ou d'Hamilton-Jacobi. Nous avons également montré comment nous pouvions obtenir des intégrales les trajectoires de manière entièrement algébrique. Nous avons montré que les trajectoires bornées étaient fermées.

Nous avons étudié l'algèbre cubique la plus générale formée par les intégrales d'ordre deux et trois d'un système superintégrable quantique. Cette construction nous a permis, dans le cas quantique, de trouver une méthode permettant d'obtenir le spectre d'énergie dégénéré. Nous avons pu trouver des réalisations en terme d'algèbres d'oscillateurs déformées et construire des représentations de type Fock. Nous avons obtenu deux formules, selon que nous avons $\beta = 0$ ou $\beta \neq 0$, donnant la fonction de structure en termes des constantes de structure et de l'opérateur de Casimir. L'opérateur de Casimir pouvait, quant à lui, être réécris en terme de l'hamiltonien. Nous avons tout d'abord appliqué cette méthode à des systèmes dont le potentiel était écrit en terme de fonctions rationnelles. Tous les systèmes considérés sont séparables en coordonnées cartésiennes, ce qui est une conséquence de l'intégrale d'ordre 2. Nous pouvions donc voir tous ces hamiltoniens comme la somme de deux hamiltoniens en une dimension. Tous les cas des potentiels avec une fonction rationnelle avaient une structure de supersymétrie et pouvaient être discutés du point de vue de la mécanique quantique supersymétrique. Pour certains cas, nous avons observé l'existence de fonctions d'ondes qui étaient dans une des coordonnées un état singulet. De tels états sont annihilés par les opérateurs de création et d'annihilation. Le spectre correspondant n'est pas trouvé en totalité dans l'algèbre cubique et contribue aussi à la dégénérescence des niveaux d'énergie. Ces états singulets apparaissent selon l'algèbre cubique comme des représentations unitaires (équation (5.2.10) et (5.2.11)) valides seulement pour p=0 ou p=0,1.

Cette relation entre la superintégrabilité avec intégrales d'ordre trois ainsi que la supersymétrie est très intéressante et soulève également de nouvelles questions. Ce lien mérite d'être étudié davantage.

Contrairement au cas classique, dans le cas quantique il y a des systèmes dont les intégrales n'engendrent pas d'algèbre cubique. Ce phénomène est intriguant et il faudrait explorer davantage cette situation pour identifier l'algèbre polynomiale impliquée. On pourrait envisager de construire cette algèbre à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation.

Nous avons également appliqué les résultats du chapitre 5 sur un hamiltonien écrit en terme de la quatrième transcendante de Painlevé. Nous avons pu construire l'algèbre cubique et les représentations de types Fock. L'hamiltonien unidimensionnel en x apparaît également dans le contexte de la mécanique quantique supersymétrique d'ordre plus élevé au sein de laquelle les opérateurs de supercharges sont des opérateurs différentiels d'ordre plus élevé. Nous avons présenté des résultats généraux mais nous avons également donner explicitement le spectre d'énergie et les fonctions d'ondes pour plusieurs cas particuliers. Nous avons constaté un phénomène très intéressant qui consiste non seulement en l'existence d'états qui sont un singulet, mais en celle d'états qui font partie d'un doublet. Nous avons pu relier ces résultats avec ceux obtenus par la méthode utilisant les algèbres cubiques. Ces états qui appartiennent à des singulets ou doublets apparaissent comme des représentations unitaires valides seulement pour p=0 ou p=0,1. Une piste d'investigation future serait de déterminer si ces fonctions d'ondes peuvent être réécrites en selon des polynômes orthogonaux connus.

Nous avons observé une relation intéressante entre les potentiels superintégrables avec une intégrale d'ordre 3 et la supersymétrie avec des opérateurs d'ordre plus élevé. Il faudrait poursuivre la recherche de tels systèmes et leurs liens avec la superintégrabilité. On pourrait envisager 3 manières de généraliser les résultats. Puisque la factorisation n'est pas unique, comme l'a montré Mielnik, nous pourrions tenter d'obtenir pour des cas particuliers tous les superpartenaires. Nous pourrions également tenter de poursuivre la classification des systèmes avec l'invariance de forme dans la mécanique quantique supersymétrique avec des opérateurs de supercharge d'ordre plus élevé. Nous avons considéré dans cette thèse le cas de potentiels avec une supersymétrie d'ordre 1 et une autre d'ordre deux. Nous pourrions envisager d'investiger d'autres types de supersymétrie. La supersymétrie pour des hamiltoniens en deux dimensions qui n'admettent pas la séparation de variable devrait également être étudiée davantage [1,2]. Nous savons qu'il existe des systèmes superintégrables qui n'admettent pas la séparation de variables tels que les systèmes avec un champ magnétique [3,4] ou un spin [5,6]. Il faudrait donc étudier si la supersymétrie peut aider à faire l'étude de tels systèmes.

Cependant, nos résultats utilisant l'algèbre cubique ne dépendent pas du système de coordonnées, de l'espace considéré ou même de la séparabilité et pourraient donc s'appliquer directement. Nous pourrions les appliquer à des sytèmes superintégrables séparables en coordonnées polaires, elliptiques et paraboliques dont la classification n'est toutefois pas complète à l'heure actuelle.

Il existe un nombre très limité de systèmes à plusieurs corps exactement résolubles, même en une dimension. Le modèle de type Calogero-Moser est surement un des exemples les plus fameux et les plus étudiés de tels modèles. Ces modèles sont reliés à différentes branches de la physique telle que la matière condensée. Nous pourrions voir si les algèbres cubiques et les transcendantes de Painlevé pourraient jouer un rôle dans de tels systèmes à plusieurs corps.

Dans cette thèse, nous avons étudié des algèbres cubiques qui sont des extensions non linéaires des algèbres de Lie. Ces structures algébriques ont permis l'étude de systèmes superintégrables en mécanique quantique. D'un point de vue plus mathématique, ces structures algébriques sont aussi des objets d'étude intéressants en soi. Les algèbres polynomiales, par exemple, ne sont pas très bien connues et devraient être étudiées davantage. À notre connaissance, aucune classification des algèbres quadratiques ou cubiques n'existe. De telles investigations sont importantes, car ces structures pourraient avoir des applications dans de nombreux domaines de la physique.

6.7. Références

[1] F.Cannata, M.V.Ioffe et D.N.Nishnianidze, J.Phys. A35 1389-1404 (2002).

[2] M.V.Ioffe et P.A.Valinevich, J.Phys. A38, 2497-2510 (2005).

[3] F.Charest, C.Hudon et P.Winternitz, J.Math.Phys. 48, 012105.1-16 (2007).

[4] J.Bérubé et P.Winternitz, J.Math.Phys.45, 1959-1973 (2004).

[5] P.Winternitz et I.Yurdusen, J.Math.Phys. 47, 103509.1-10 (2006).

[6] P.Winternitz et I.Yurdusen, ArXiv :math-ph/0711.0753 (2007).